Analyse nicht-determinierter Signale

Grundlagen der Systemtheorie

$$\begin{matrix} \underline{U}_e(f) \\ u_e(t) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \underline{H}(f) \\ \boxed{LTI} \\ h(t) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \underline{U}_A(f) \\ u_A(t) \end{matrix}$$

$\underline{U}_e(f)$: Spektrum des Eingangssignals

$u_e(t)$: Eingangssignal im Zeitbereich

$\underline{H}(f)$: Übertragungsfunktion des Systems

$h(t)$: Impulsantwort des Systems

$\underline{U}_A(f)$: Spektrum des Ausgangssignals

$u_A(t)$: Ausgangssignal im Zeitbereich

$$\underline{U}_A(f) = \underline{H}(f) \cdot \underline{U}_E(f) \qquad u_A(t) = h(t) * u_E(t)$$

$$\underline{X}(f) = \mathrm{F}\{x(t)\}$$

$$x(t) = \mathrm{F}^{-1}\{\underline{X}(f)\}$$

Linearität (Superpositionsprinzip):

$$\left.\begin{matrix} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{matrix}\right\} x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

- ➔ Betrieb im linearen Teil der Kennlinie

Zeitinvarianz:

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_1(t+\tau) \rightarrow y_1(t+\tau)$$

- Zeitvariante Systeme in der Audiotechnik: Röhrenverstärker/Röhrenradios
- Die Temperaturabhängigkeit von el. Bauteilen kann zu Zeitvarianz führen

Kausalität:

$$y(t<0) = 0$$

- ➔ System reagiert nicht auf Ereignisse in der Zukunft

Fourier-Transformation:

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) \cdot e^{jwt} d\omega$$

Impulsantwort → Antwort des Systems im Zeitbereich auf einen Diracstoß

Laplace-Transformation:

- Falls kausale Zeitfunktion vorliegt
- Fourier-Transformation kann durch Laplace-Transformation ersetzt werden, indem man (vereinfach) $j\omega$ durch $s = \sigma + j\omega$ ersetzt.

Vorteil: Die transformierte Funktionenklasse wird wesentlich erweitert:

$U(s) = \int_0^\infty u(t) \cdot e^{-st} dt \quad mit \quad s = \sigma + j\omega$ (Bildbereich, bei FT ist dies der Frequenzbereich)

$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} U(s) \cdot e^{st} ds$ (Rücktransformation erfolgt normalerweise per Tabellenwerte)

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $f(t) = \varepsilon(t) \cdot e^t$ mit $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, \; für \; x < 0 \\ 1, \; für \; x \geq 0 \end{cases}$. Gesucht ist $F(s)$.

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \varepsilon(t) \cdot e^t \cdot e^{-st} dt \\
&= \int_0^\infty 1 \cdot e^{t(1-s)} dt \\
&= \left. \frac{e^{t(1-s)}}{1-s} \right|_0^\infty \\
&= \lim_{t \to \infty} \left(\frac{e^{t(1-s)}}{1-s} \right) - \frac{1}{1-s} = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{e^{t(1-\sigma-j\omega)}}{1-s} \right) - \frac{1}{1-s} \\
&= \lim_{t \to \infty} \left(\frac{e^{t-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}}{1-s} \right) - \frac{1}{1-s}
\end{aligned}
$$

Da Betrag und Phase durch das Einführen von $s = \sigma + j\omega$ unabhängig sind, braucht nur $e^{t-\sigma t}$ auf Konvergenz untersucht zu werden. Man erhält:

$$
\lim_{t \to \infty} \left(\frac{e^{t-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}}{1-s} \right) - \frac{1}{1-s} = \begin{cases} \infty, \; für \; \sigma < 1 \\ -\frac{1}{1-s}, \; für \; \sigma \geq 1 \end{cases}
$$

- Anwendung für z.B. digitale Filter/adaptive Filter

Komplexe Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_A(j\omega)}{\underline{U}_E(j\omega)} = H(\omega) \cdot e^{\varphi(\omega)}$$

$H(\omega)$: Amplitudenfrequenzgang

$\varphi(\omega)$: Phasenfrequenzgang

$$\varphi(\omega) = \varphi_A(\omega) \cdot \varphi_E(\omega)$$

- ➔ Beschreibt das System!!

Phasenlaufzeit:

$T_P = \dfrac{-\varphi(\omega) + k \cdot \pi}{\omega}$ → Umpolung um Vielfache von 180° (k = …,-2,-1,0,1,2,…)

Gruppenlaufzeit:

$T_G = -\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$ beschreibt die Verzögerung das Maxima der übertragenen Energie (→ Latenz)

- Ableitung des Phasengangs

Übertragungsmaß:

$$H^* = 20 \cdot \lg(H) \ in \ dB$$

- Bode-Diagramm → mit Lineal gezeichnete Flanke (Abfall um 6dB/Oktave)

Verzerrungsfreies System

$$H(\omega) = const.$$

$$\varphi(\omega) = -\omega_0 T_0 + k \cdot \pi$$

$$T_G = T_0 = const.$$

- ➔ Für die Form des Signals ist es wichtig, ob die Form der überlagerten Signale gleich bleibt
- ➔ Verzerrungsfrei → keine Änderung der Amplitude der eingehenden Signale → keine Änderung im Frequenzbereich