Rekursive / Nichtrekursive Systeme:

- A-Koeffizienten für Feedbackpfad
- B-Koeffizienten für Feed Forward Pfad
  - ➔ Das Erscheinen von $y[n]$ in der Differenzengleichung zeigt ein rekursives System
- Sonderfall: All-Pole-Systeme (ohne Feed Forward) und All-Zero-Systeme (ohne Feedbackpfad = nichtrekursive Systeme)

Sonderfall: FIR-System

- Die Koeffizienten des FIR Systems entsprechen der Impulsantwort

$$y[n]=\sum_{i=0}^{M} b_i \cdot x[n-i] \rightarrow \text{Signal durch Dirac ersetzen} \rightarrow y[n]=\sum_{i=0}^{M} b_i \cdot \delta[n-i]$$

- Dieses Prinzip gilt für größere Gleichungen genauso → $y[0]$ einsetzen und ausrechnen, usw.

Dirac-Impuls für diskrete Systeme:

- Der Flächeninhalt eines Dirac-Impulses sollte 1 betragen
- Die Fläche beim diskreten Signal $[1,0,0,0]$ wäre gleich der Periodendauer T
- Korrekt müsste der Dirac-Impulse im diskreten $\left[\frac{1}{T},0,0,0\right]$ lauten

Frequenzgang:

$$h(t) \circ\!-\!\bullet\, H(j\omega)(\rightarrow FT)$$
$$h[n] \circ\!-\!\bullet\, H(e^{j\Omega})(\rightarrow FTA)$$

Übertragungsfunktion:

$$h(t) \circ\!-\!\bullet\, H(s)(\rightarrow LT)$$
$$h[n] \circ\!-\!\bullet\, H(z)(\rightarrow ZT)$$

z-Übertragungsfunktion:

$$x[n]+x[n-1] \circ\!-\!\bullet\, X(z)+X(z)\cdot z^{-1}$$

➔ Aus der Differenzengleichung kann man den Frequenzbereich direkt hinschreiben

$$y[n] \circ\!-\!\bullet\, Y(z)$$

Beispiel: System erster Ordnung mit Feedback und Feed Forward Pfad

$$\begin{aligned} y[n] &= 1{,}5\cdot\left(x[n]+0{,}5\cdot y[n-1]\right)+2\cdot x[n-1] \\ &= 1{,}5\cdot x[n]+2\cdot x[n-1]+0{,}75\cdot y[n-1] \end{aligned}$$

$$Y(z) = 1{,}5 \cdot X(z) + 2 \cdot X(z) \cdot z^{-1} + 0{,}75 \cdot Y(z) \cdot z^{-1}$$

$$Y(z)\left(1 - 0{,}75 \cdot z^{-1}\right) = \left(1{,}5 + 2 \cdot z^{-1}\right) \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1{,}5 + 2 \cdot z^{-1}}{1 - 0{,}75 \cdot z^{-1}}$$

Koeffizienten des Systems: $b_0 = 1{,}5;\ b_1 = 2;\ a_0 = 1;\ a_1 = -0{,}75$

Übergang zum Frequenzgang: $\left(z \to e^{j\Omega}\right)$

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1{,}5 + 2 \cdot e^{-j\Omega}}{1 - 0{,}75 \cdot e^{-j\Omega}}$$

Beispiel 2:

$$y[n] = 1{,}5 \cdot x[n] - 0{,}5 \cdot y[n-1]$$

$$Y(z) = 1{,}5 \cdot X(z) - 0{,}5 \cdot Y(z) \cdot z^{-1}$$

$$Y(z) \cdot \left(1 + 0{,}5 \cdot z^{-1}\right) = 1{,}5 \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1{,}5}{1 + 0{,}5 \cdot z^{-1}}$$

Koeffizienten des Systems: $b_0 = 1{,}5;\ a_0 = 1;\ a_1 = 0{,}5$

Frequenzgang:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1{,}5}{1 + 0{,}5 \cdot e^{j\Omega}}$$

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = \frac{1{,}5}{\left|1 + 0{,}5 \cdot e^{j\Omega}\right|}$$

$$\begin{aligned}
\left|1 + 0{,}5 \cdot e^{j\Omega}\right| &= \left|1 + 0{,}5 \cdot \cos(\Omega) - 0{,}5\, j \sin(\Omega)\right| \\
&= \sqrt{\left(1 + 0{,}5 \cdot \cos(\Omega)\right)^2 + \left(-0{,}5 \cdot \sin(\Omega)\right)^2} \\
&= \sqrt{1 + \cos(\Omega) + 0{,}25 \cdot \cos(\Omega)^2 + 0{,}25 \cdot \sin(\Omega)^2} \\
&= \sqrt{1 + \cos(\Omega) + 0{,}25 \cdot \left(\sin(\Omega)^2 + \cos(\Omega)^2\right)} \\
&= \sqrt{1{,}25 + \cos(\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = \frac{1{,}5}{\sqrt{1{,}25 + \cos(\Omega)}} \quad \left(\Omega \to \omega T = 2\pi f\right)$$

Pole & Nullstellen:

$$H(z) = \frac{1,5}{1+0,5\cdot z^{-1}} = \frac{1,5}{1+0,5\cdot\frac{1}{z}} = \frac{1,5\cdot z}{z+0,5}$$

Nullstellen → Zähler = 0 → $z_n = 0$

Polstellen → Nenner = 0 → $z_p = -0,5$

$$H(z) = \frac{1,5(z-z_n)}{z-z_p} = \frac{1,5\cdot z}{z+0,5}$$

Pol-Nullstellen Diagramme:

- Bei Laplace Transformation (kontinuierliche Systeme) → s-Ebene → Stabilität gegeben, wenn alle Polstellen links von der imaginären Achse
- Bei z-Transformation (diskrete Systeme) →z-Ebene → Stabilität gegeben, wenn alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen
- Polstellen geben Anhebungen im Frequenzgang an (Lage beeinflusst die Stärke der Anhebung)

Beispiel: Nichtrekursives System

$$y[n] = 2\cdot x[n] + 3\cdot x[n-1]$$

$$Y(z) = 2\cdot X(z) + 3\cdot X(z)\cdot z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 2+3\cdot z^{-1}$$

$$2+3\cdot z^{-1}\cdot\frac{z^1}{z^1} = \frac{2z+3}{z}$$

Nullstellen → $2z+3=0 \rightarrow z_n = -1,5$

Polstellen → $z_p = 0$

- → FIR Systeme haben nur Pole im Ursprung, sie sind also immer stabil!

Zusammenfassung: Möglichkeiten, um Systeme zu beschreiben

	kontinuierlich	diskret
Impulsantwort $h(t)/h[n]$	x	x
Frequenzgang $H(j\omega)/H(e^{j\Omega})$ ➔ Amplitudengang + Phasengang	x	x
Übertragungsfunktion $H(s)/H(z)$	x	x
Differentialgleichung	x	
Differenzengleichung		x
Blockschaltbild / Signalflussdiagramm	x	x
Pol/Nullstellen – Diagramm	x	x

Analoge Filter

Butterworth-TP → $H(s)=\dfrac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}$ → $p_{1,2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\pm j\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

➔ Polstellen liegen alle auf einem Kreis → Höhere Ordnung durch Kaskadierung der niedrigen Ordnungen

Tschebyscheff-Filter

$F(\omega^2)=\varepsilon^2\cdot c_n^{\ 2}(\omega)$ → ε = Ripple-Faktor (gibt des Grad der Welligkeit des Filters an)

➔ Polstellen liegen auf einer Ellipse (Tscheb.-1) oder auf einer Gerade (Tscheb.-2)

Vom TP zum HP:

$$\omega_{TP}\Rightarrow -\frac{\omega_0^{\ 2}}{\omega_{HP}}$$

Vom TP zum BP:

- Bandbreite verdoppeln → verschieben an den entsprechenden Platz im Frequenzbereich
- Multiplizieren von TP und HP