Wdh. & Ausblick: Transformationen

	$x(t)$	$x[n]$
Frequenzgang	$X(j\omega)\ (FT)$	$X(e^{j\Omega}) \to DFT\,/\,FFT\,(X[k])$
Übertragungsfunktion	$X(s)\ (LT)$	$X(z)\ (ZT)$

Berechnung einer DFT

$$X[k] = [3,2,1] = 3\cdot\delta(n) + 2\cdot\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$N = 5$ → die restlichen Werte außerhalb des Vektors werden mit Nullen gefüllt → „Zero Padding“

$$X[k] = \sum_{n=0}^{4} x[n]\cdot e^{j2\pi\cdot\frac{kn}{5}}$$

Jetzt werden für k die Werte 0-4 eingesetzt, entsprechend erhält man 5 Werte der DFT.

$$X[0] = \sum_{n=0}^{4} x[n] = 3+2+1+0+0 = 6$$

$$\begin{aligned}
X[1] &= \sum_{n=0}^{4} x[n]\cdot e^{-j2\pi\cdot\frac{n}{5}} = 3 + 2\cdot e^{-j\frac{2\pi}{5}} + e^{-j\frac{4\pi}{5}} \\
&= 3 + 2\cdot\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) + \left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) - j\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) \\
&= 3 + 2\cdot(0{,}309 - j0{,}951) + (-0{,}809 - j0{,}588) \\
&= 2{,}809 - i2{,}49 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Aus diesen Werten kann nun der Amplitudengang mit den entsprechenden Beträgen bestimmt werden.

$$|X[k]| = (6;\ 3{,}75;\ 1{,}71;\ 1{,}71;\ 3{,}75)$$

Die Tatsache, dass die Werte der DFT komplex konjugiert sind, ermöglicht es, dass man, sobald man die Mitte erreicht hat, nicht mehr rechnen muss. Gleiches gilt natürlich, wie man sieht, auch für die Beträge.

- ➔ Die DFT gibt ein diskretes Spektrum aus, also interpretiert sie das Eingangssignal als periodisch, was natürlich nicht stimmt! Daher muss man bei der Wahl des Intervalls auf abgeschlossene Perioden achten!
- ➔ Leakage-Effekt (weil Signale quasi-periodisch) → Abhilfe: Fenstern des Signals

Transiente Signale:

- Bsp. Impulsantwort, Klatschen → nicht periodisch, aber stationär
- Unendlich langes Abklingverhalten
- ➔ Fensterung nicht möglich

Fensterung:

- Grundsätzlich gilt, je länger das Fenster, desto besser die Näherung durch die FFT

Nicht-periodische, nicht stationäre Signale

- z.B. Rauschen
- Betrachtung der Änderung des Signals
- Darstellung z.B. im Wasserfalldiagramm oder im Spektogramm
- Bsp. Klavierstück: Man erkennt anhand der Abstände der Harmonischen die Tonhöhen

Diskrete Faltung:

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] \cdot x_2[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[n-m] \cdot x_2[m]$$

$$n = 0,1,2,...,2N-2$$

N = Länge der diskreten Signale $x_1[n]$ und $x_2[n]$

Beispiel:

$$x_1[n] = [1,1,1]$$
$$x_2[n] = [1,1,1]$$

Signal $x_2[n]$ wird nun an der y-Achse gespiegelt und wie bei der Faltung üblich, an Signal $x_1[n]$ vorbeigeschoben. Die dabei entstehenden Überschneidungen werden entsprechend berechnet:

$$y[0] = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 1$$
$$y[1] = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 2$$
$$y[2] = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3$$
$$y[3] = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 2$$
$$y[4] = 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = 1$$

➔ Das Ergebnis der Faltung ist so lang, wie $2N-1$ mal die Dauer der beiden Signale zusammen.

➔ „zyklische Faltung" = Faltung über dem Frequenzbereich → Ergebnis mit Länge N

Z-Transformation

- LT für diskrete Systeme → Verallgemeinerung der FTA
- Ersetzen von $j\omega$ durch die Laplace-Variable $s = \sigma + j\omega$ ($\Omega = \omega \cdot T$)
- Z-Transformation $e^{sT} = z$
- Formel:

$$x[n] \circ\!-\!\bullet\, X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \quad (zweiseitig)$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \quad (einseitig)$$

- Auswertung des Frequenzganges am Einheitskreis (Periodizität) → $j\omega$-Achse bei LT