Fortsetzung der Z-Transformation

$$x[n] \circ\!-\!\bullet X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega}$$

$$x[nT-T] \circ\!-\!\bullet X\left(e^{j\Omega}\right) \cdot e^{-j\omega T} = X\left(e^{j\Omega}\right) \cdot e^{-j\Omega}$$

$$x[n-1]$$

$$\Rightarrow j\omega \Rightarrow s = \sigma + j\omega$$

$$x[n] \circ\!-\!\bullet X(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{nsT}$$

$$x[n-1] \circ\!-\!\bullet X(s) \cdot e^{-sT}$$

$$x[n-1] \circ\!-\!\bullet X(z) \cdot z^{-1}$$

$$x[n] \circ\!-\!\bullet X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

- ➔ Diskrete LTI-Systeme können nur addieren, multiplizieren und verzögern!
- ➔ z^{-1} → Signal um eine Abtastperiode verzögert

$$\delta[n] = [1,0,0,0,0] \circ\!-\!\bullet X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} = 1 \cdot z^{0} = 1$$

$$\varepsilon[n] = [1,1,1,1,1] \circ\!-\!\bullet X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon[n] \cdot z^{-n} = 1 \cdot z^{0} + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \quad \left(\mathit{für}\ |z|<1\right)$$

Beweis durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
1 \qquad : \left(1-z^{-1}\right) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots \\
\underline{-1+z^{-1}} \\
\quad z^{-1} \\
\quad \underline{-z^{-1}+z^{-2}} \\
\qquad z^{-2} \\
\qquad \underline{z^{-2}+z^{-3}} \\
\qquad \vdots
\end{array}$$

Im kontinuierlichen Zeitbereich ist die Ableitung des Einheitssprungs der Dirac-Impuls. Im diskreten Zeitbereich wird dies über Differenzen berechnet.

$$\delta[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-1] \circ\!-\!\bullet\, X_s(z) = X_\varepsilon(z) - X_\varepsilon(z)\cdot z^{-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$$
$$= \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}} = 1$$

$$\delta[n] \circ\!-\!\bullet\, 1$$

Beispielrechnung zur Z-Transformation:

$$x[n] = [0,1,2,3,2,1,0]$$
$$x[n] = \begin{cases} n+1, & \text{für } 0 \le n < 2 \\ -n+5, & \text{für } 3 \le n < 5 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{2}(n+1)\cdot z^{-n} + \sum_{n=3}^{5}(-n+5)\cdot z^{-n}$$
$$= 1\cdot z^{0} + 2\cdot z^{-1} + 3\cdot z^{-2} + 2\cdot z^{-3} + 1\cdot z^{-4} + 0\cdot z^{-5}$$
$$= \delta[n] + 2\cdot\delta[n-1] + 3\cdot\delta[n-2] + 2\cdot\delta[n-3] + \delta[n-4]$$

Ein Dreieck ist das Ergebnis einer Faltung zweier Rechtecke im Zeitbereich, es muss also auch das Ergebnis einer Multiplikation zweier in den Frequenzbereich transformierter Rechtecke sein.

$$x_1[n] = [1,1,1] = x_2[n]$$
$$x_1[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-3] \quad \circ\!-\!\bullet \quad X_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-3}} = \frac{1-z^{-3}}{1-z^{-1}}$$
$$X_1(z)\cdot X_2(z) = \left(\frac{1-z^{-3}}{1-z^{-1}}\right)^2 = \frac{\left(1-z^{-3}\right)^2}{\left(1-z^{-1}\right)^2} = \frac{1-2\cdot z^{-3}+z^{-6}}{1-2\cdot z^{-1}+z^{-2}}$$

Dividiert man das Ergebnis per Polynomdivision, erhält man als Ergebnis die Z-Transformierte des Dreiecks, welche zuvor berechnet worden ist.

Weiteres Beispiel zur Z-Transformation:

$$x_1[n] = [3,2,1] \qquad \circ\!-\!\bullet\; X_1(z) = 3 + 2\cdot z^{-1} + 1\cdot z^{-2}$$
$$x_2[n] = \left[1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad \circ\!-\!\bullet\; X_2(z) = 1 - \frac{1}{2}\cdot z^{-1} + \frac{1}{2}\cdot z^{-2}$$

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] \;\circ\!-\!\bullet\; Y(z) = X_1(z)\cdot X_2(z)$$

$$\left(3+2\cdot z^{-1}+1\cdot z^{-2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot z^{-1}+\frac{1}{2}\cdot z^{-2}\right)$$
$$=3-\frac{3}{2}\cdot z^{-1}+\frac{3}{2}\cdot z^{-2}+2\cdot z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}+z^{-2}-\frac{1}{2}\cdot z^{-3}+\frac{1}{2}\cdot z^{-4}$$
$$=3+\frac{1}{2}\cdot z^{-1}+\frac{3}{2}\cdot z^{-2}+\frac{1}{2}\cdot z^{-3}+\frac{1}{2}\cdot z^{-4}$$

Aus der Rücktransformation ergibt sich im Zeitbereich:

$$y[n]=\left[3,\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]=3\cdot\delta[n]+\frac{1}{2}\cdot\delta[n-1]+\frac{3}{2}\cdot\delta[n-2]+\frac{1}{2}\cdot\delta[n-3]+\frac{1}{2}\cdot\delta[n-4]$$

Das Ergebnis der Faltung ist 2N-1 lang, wenn N die Länge der Einzelsignale ist.

Digitale Systeme

Ableitung für zeitkontinuierliche Signale:

$$\frac{d}{dt}x(t)\circ\!-\!\bullet\ j\cdot\omega\cdot X(j\omega)$$

Beispiel RC-Netzwerk:

Es ergibt sich eine DGL → $u_2(t)=\frac{1}{RC}\cdot\int u_1(t)\,dt-\frac{1}{RC}\cdot\int u_2(t)\,dt$

In diskreten Systemen wird der Differentenquotient wie bei der Herleitung der Ableitung ermittelt, mit dem Unterschied, dass das Zeitintervall nicht verändert werden kann.

$\frac{x[nT]-x[nT-T]}{T}$ Differentenquotient für diskrete Systeme

Differenzengleichung:

Beispiel RC-Netzwerk (TP):

$$\frac{u_2[nT]-u_2[nT-T]}{T}\cdot RC\cdot u_2[nT]=u_1[nT]$$

Umformung nach $u_2[nT]$:

$$\frac{u_2[nT]\cdot RC-u_2[nT-T]\cdot RC}{T}+u_2[nT]=u_1[nT]$$

$$u_2[nT]\cdot\left(\frac{RC}{T}+1\right)-u_2[nT-T]\cdot\frac{RC}{T}=u_1[nT]$$

$$\frac{u_2[nT]\cdot RC}{T}+\frac{u_2[nT]\cdot T}{T}=u_1[nT]+u_2[nT-T]\cdot\frac{RC}{T}$$

$$\frac{u_2[nT]\cdot(RC+T)}{T}=u_1[nT]+u_2[nT-T]\cdot\frac{RC}{T}$$

$$u_2[nT]=u_1[nT]\cdot\frac{T}{RC+T}+u_2[nT-T]\cdot\frac{RC}{RC+T}$$

Allgemeine Schreibweise der Differenzengleichung

$$x[nT]\rightarrow x[n]$$

$$y[n]=b\cdot x[n]+a\cdot y[n-1]$$

- ➔ b-Koeffizienten für $x[n],x[n-1],x[n-2],...$
- ➔ a-Koeffizienten für $y[n],y[n-1],y[n-2],...$
- Maximale Vorkommende Verzögerung = Ordnung des Systems (Bsp. $y[n-2]$ → 2. Ordnung)
- Kausale Systeme → $N\leq M$ (→ Summenformel der Differentengleichung)

Hinweise zum Blockschaltbild:

- Dreieck für Multiplikation von konstanten Faktoren
- Verzögerung mit Koeffizient in Blockform

Einteilung in rekursive und nicht-rekursive Systeme:

- System ist rekursiv, wenn das Ausgangssignal wieder auf den Eingang zurückgeführt wird → Rückkopplung von Ausgang auf den Eingang
- ➔ Rekursive Systeme können instabil werden → unendlich lange Impulsantwort

- ➔ IIR = infinite impulse response
- ➔ FIR = finite impulse response (→ nicht-rekursive Systeme)

- Kein Feedbackpfad bei nicht-rekursiven Systemen (Ausgang wieder auf den Eingang)
- ➔ Eigenschaften der Systeme können aus Differenzengleichung oder Blockschaltbild abgelesen werden