Beispiel zur bilinearen z-Transformation

$$\omega_a = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\omega_d}{2}\right) \rightarrow f_a = \frac{2}{2\pi T} \cdot \tan\left(\frac{2\pi f_d T}{2}\right)$$
$$\rightarrow f_g = 2{,}6 \text{ kHz}, f_A = 8 \text{ kHz}$$
$$\Rightarrow f_a = \frac{f_A}{\pi} \cdot \tan\left(\frac{\pi f_d}{f_A}\right) = \frac{8 \text{ kHz}}{\pi} \cdot \tan\left(\frac{\pi \cdot 2{,}6 \text{ kHz}}{8 \text{ kHz}}\right) = 45{,}38 \text{ Hz}$$

Zusammenfassung IIR Filter:

Analoges System (zum Vergleich): $H_a(s) = \dfrac{1}{1+s}$

Impulsinvariante Simulation: $H_i(z) = \dfrac{T}{1-e^{-T}z^{-1}} \rightarrow b_0 = T, a_1 = -e^{-T}$

Schrittinvariante Simulation: $H_s(z) = \dfrac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}} = \dfrac{\left(1-e^{-T}\right)z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}$

$\rightarrow b_0 = 0, b_1 = \left(1-e^{-T}\right), a_1 = -e^{-T}$

Bilineare z-Transformation: $H_b(z) = \dfrac{1+z^{-1}}{\left(1+\frac{2}{T}\right)+\left(1-\frac{2}{T}\right)z^{-1}}$

$\rightarrow b_0 = 1, b_1 = 1, a_0 = \left(1+\frac{2}{T}\right), a_1 = \left(1-\frac{2}{T}\right)$

FIR-Filter

- Sind ein Sonderfall der diskreten LTI-Systeme → besitzen keinen Feedback-Pfad
- Pole im Ursprung → keine Frequenzgangbeeinflussung → gelten oft als polstellenfrei
- Können linearphasig ausgelegt werden
- Sind immer stabil
- Brauchen mehr Koeffizienten als IIR-Filter mit gleicher Steilheit
- Sind weniger anfällig für Rundungsfehler
- Haben endliche Impulsantworten

Lineare Phase:
Lineare Impulsantwort → konstante Gruppenlaufzeit → linearer Phasengang

4 Grundarten für linearphasige FIR-Filter (Länge der Impulsantwort → $N+1$):

1. Reelle und gerade Impulsantwort → reeller (gerader) Frequenzgang → N gerade
2. Reelle und gerade Impulsantwort → reeller (gerader) Frequenzgang → N ungerade
3. Reelle und ungerade Impulsantwort → imaginärer (ungerader) Frequenzgang → N gerade
4. Reelle und ungerade Impulsantwort → imaginärer (ungerader) Frequenzgang → N ungerade

Beispiel FIR-Filter:

$$h[n] = [1,2,3,4,3,2,1,0,0]$$
$$= \delta[n] + 2\cdot\delta[n-1] + 3\cdot\delta[n-2] + \ldots$$

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + \ldots + b_6 z^{-6} \left(\rightarrow 6.\text{ Ordnung}, N = 6\right) = \sum_{k=0}^{6} b_k z^{-k}$$

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=0}^{6} b_k e^{-kj\Omega} = b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + b_2 e^{-2j\Omega} + \ldots$$

Beispiel und Herleitung für Typ 1:

$H(z) = b_{-3} z^3 + b_{-2} z^2 + b_{-1} z^1 + b_0 z^0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$ (→ System ist akausal!)

$$h[n] = b_{-3}\cdot\delta[n+3] + b_{-2}\cdot\delta[n+2] + b_{-1}\cdot\delta[n+1] + \ldots$$

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} b_k e^{-kj\Omega} = b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \left(e^{kj\Omega} + e^{-kj\Omega}\right)$$
$$= b_0 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \left(\cos(k\Omega) + j\sin(k\Omega) + \cos(k\Omega) - j\sin(k\Omega)\right)$$
$$= b_0 + 2\cdot\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \cos(k\Omega)$$

- ➔ Typ 1 → symmetrische Impulsantwort, N gerade → Frequenzgang reell
- ➔ $H_s\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j\frac{N}{2}\Omega}\cdot b_0 + 2\cdot\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \cos(k\Omega)$ (→ Verschiebungssatz)

$\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right| = b_0 + 2\cdot\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \cos(k\Omega)$ → unverändert, weil $\left|e^{-j\frac{N}{2}\Omega}\right| = 1$

Typ 2 → $H_{II}\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j\frac{N}{2}\Omega}\cdot\left[2\cdot\sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} b_k \cos\left((k-0,5)\Omega\right)\right]$

Typ 3 → $H_{III}\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j\frac{N}{2}\Omega}\cdot\left[2j\cdot\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \sin(k\Omega)\right]$

Typ 4 → $H_{II}\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j\frac{N}{2}\Omega}\cdot\left[2j\cdot\sum_{k=1}^{\frac{N+1}{2}} b_k \sin\left((k-0,5)\Omega\right)\right]$

$$\Omega = \omega T \rightarrow \frac{f_A}{2}\ einsetzen \rightarrow 2\pi \cdot \frac{f_A}{2} \cdot \frac{1}{f_A} = \pi$$

Warum kann Typ drei kein HP sein:

$$\left| H\left(e^{j\Omega}\right) \right| \rightarrow \frac{f_A}{2}\ einsetzen \rightarrow 2j \cdot 0 = 0$$

- ➔ HP müsste bei Nyquistfrequenz 1 sein

Fenstermethode:

Verfahren: unendliche bzw. kontinuierliche Impulsantwort abtasten und auswerten

Ablauf:

- T festlegen und gewünschte Impulsantwort $h(t)$ abtasten, dies ergibt $h[n]$, $n = -\infty \ldots \infty$
- Relevanten Anteil von $h(t)$ rausschneiden, Anzahl der bleibenden Abtastwerte ergibt N .
  Koeffizienten des Filters: $b[n] = T \cdot h[n]$
- Koeffizienten durch Fenster gewichten (Vermeiden von Gibbschem Phänomen)

Wenn der Frequenzgang vorliegt, muss zunächst in den Zeitbereich transformiert werden.

Beispiel: inverse FT eines idealen TP

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\omega_g}^{\omega_g} e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi jt} \cdot e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_g}^{\omega_g} = \frac{1}{2\pi jt} \cdot \left(e^{j\omega_g t} - e^{-j\omega_g t}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi jt} \cdot \left(\cos(\omega_g t) + j\sin(\omega_g t) - \cos(\omega_g t) + j\sin(\omega_g t)\right) \\
&= \frac{\sin(\omega_g t)}{\pi t} = \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \mathrm{si}(\omega_g t)
\end{aligned}$$

Abtasten → $h[n] = \frac{\omega_g}{\pi} \cdot \mathrm{si}\left[\omega_g nT\right]$

- ➔ Höhere Übergangsbreite, wenn man größere Nebenkeulendämpfung erreichen möchte
- ➔ Umso höher die Ordnung, umso geringer die Übergangsbreite

Frequenzabtastung:

- Frequenzgang wird abgetastet → IDFT → Impulsantwort
- Anzahl der Abtastwerte entscheidet über Genauigkeit
- Zwischen Abtastwerten wird bei der DFT interpoliert → es entstehen Transitionskoeffizienten
- ➔ Ergebnis wird wegen linearer Interpolation nicht unbedingt besser

Approximation im z-Bereich:

- Genau wie bei IIR Filtern, mit der Ausnahme, dass die Systeme nicht instabil werden können

Frequenz-Transformation:

- Verschiebung von TP
- Subtraktion von HP und TP → BP
- Differenzfilter (Komplementärfilter) → z.B. TP → HP ($H_{HP}\left(e^{j\Omega}\right)=1-H_{TP}\left(e^{j\Omega}\right)$)
- BS: $H_{BS}\left(e^{j\Omega}\right)=1-H_{BP}\left(e^{j\Omega}\right)$ (Komplementärfilter zur Bandsperre) → Nur Typ 1