Aufgabe 10 des Aufgabenzettels

Lösung:

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\overline{A}\cdot B\right)+\left(A\cdot B\right)+\left(A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\right)\\
&= B\cdot\left(A+\overline{A}\right)+\left(A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\right)\\
&= B+\left(A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\right)\\
&= B+\left(\overline{B}\cdot k\right) \qquad k=\left(A\cdot\overline{C}\right)\\
&= \left(B+\overline{B}\right)\cdot\left(B+k\right)\\
&= B+\left(A\cdot\overline{C}\right)
\end{aligned}
$$

Eintragen eines Terms in ein KV-Diagramm:

- bei 3 Variablen und Mintermen in der Funktion:
Minterme können direkt ins KV-Diagramm übernommen werden
- falls Variablen fehlen (bei Produkttermen)
über die Wahrheitstabelle findet man die passenden Minterme, die eingetragen werden müssen. Dazu trägt man den Produktterm ein und nimmt alle „1“ Felder heraus. Die zugehörigen Werte ergeben die entsprechenden Minterme für das KV-Diagramm

Bsp.:

A	B	C	$\left(A+\overline{B}\right)$	
0	0	0	0	
1	0	0	1	$\rightarrow\left(A+\overline{B}+\overline{C}\right)$
0	1	0	0	
0	0	1	0	
1	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	1	1	$\rightarrow\left(A+\overline{B}+C\right)$
1	1	1	0	

Man sieht, dass beide Minterme jeweils die Variable C, die im Produktterm fehlte, enthalten. Dadurch, dass sie einmal in Term steht und einmal negiert ist, fällt sie beim Minimieren weg! Für das KV-Diagramm ist es jedoch notwendig, dass Minterme verwendet werden.

Partiell - definierte Funktionen

• Häufig ist bei Schaltfunktionen nicht für alle möglichen Kombinationen der Eingangsvariablen der Ausgang definiert

• Die nicht definierten Eingangskombinationen sind für das Verhalten unerheblich und werden mit "x" gekennzeichnet (x = don’t care (egal))

• Eine geschickte Nutzung der "don't cares" kann eine einfache Funktionsgleichung liefern

Beispiel

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
1	0	0	0	x
0	1	0	0	x
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
1	1	0	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	1	1	1	0

Im KV-Diagramm kann für das "x" entweder eine 1 oder eine Null stehen, sodass möglicht gut minimiert werden kann.

A

	0	x (0)	0	0	
B	x (1)	0	0	1	
	1	0	0	1	D
	0	0	0	0	

C

Prinzipiell wird versucht, durch Setzen von Nullen und Einsen für „x“-er, möglichst größere Kreise im KV-Diagramm zu erhalten oder Felder, die ohne Nachbarfelder stehen, nicht in die Berechnung mit einbeziehen zu müssen.

Beispiel: Anzeige des Ladezustands eines Akkus

Drei Eingänge: A = „1“ wenn Spannung des Akkus ≥ 75 % des Maximalwertes

B = „1“ wenn Spannung des Akkus ≥ 50 % des Maximalwertes

C = „1“ wenn Spannung des Akkus ≥ 25 % des Maximalwertes

Ausgänge: Drei LEDs (sollen der Ladezustand anzeigen): E, F, G

E, F, G leuchten, wenn Spannung ≥ 75 %

F, G leuchten, wenn Spannung ≥ 50 %

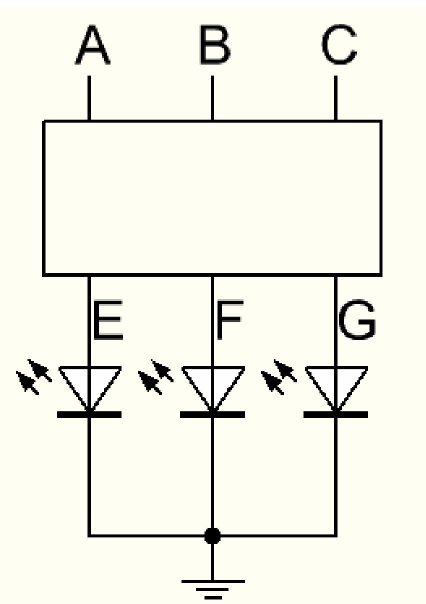
G leuchtet, wenn Spannung ≥ 25 %

Keine LED leuchtet, wenn Spannung <25 %

Wahrheitstabelle:

A	B	C	E	F	G
0	0	0	0	0	0
1	0	0	x	x	x
0	1	0	x	x	x
0	0	1	0	0	1
1	1	0	x	x	x
0	1	1	0	1	1
1	0	1	x	x	x
1	1	1	x	x	x

Bauteilschema:



$$E = f(A,B,C)$$
$$F = g(A,B,C)$$
$$G = h(A,B,C)$$

KV-Diagramm für E:

A

	0	x (0)	0	0
B	x (1)	x (1)	1	x (1)

C

Ergebnis: $f\left(A,B,C\right)=A$

KV-Diagramm für F:

A

	0	x (1)	1	0
B	x (0)	x (1)	1	x (0)

C

Ergebnis: $g\left(A,B,C\right)=B$

KV-Diagramm für G:

A

	0	x (0)	1	1
B	x (0)	x (0)	1	x (1)

C

Ergebnis: $h\left(A,B,C\right)=C$

<u>Weitere wichtige Schaltfunktionen (Binärfunktionen)</u>

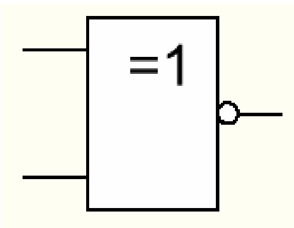
Äquivalenz (XNOR)

Funktionstabelle:

A	B	A≡B
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

$$\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)+\left(A\cdot B\right)=A\equiv B$$

Symbol:



Schreibweise: A≡B

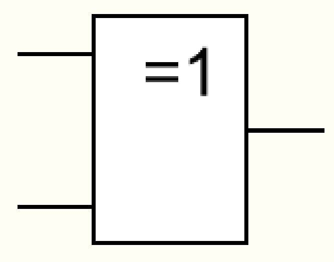
Antivalenz (XOR)

Funktionstabelle:

A	B	A≠B
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

$$\left(A \cdot \overline{B}\right) + \left(\overline{A} \cdot B\right) = A \neq B$$

Symbol:



Schreibweise: A≠B

Es gilt:

$$A \equiv B = \overline{A \neq B}$$

bzw.

$$A \neq B = \overline{A \equiv B}$$

<u>Schaltnetze zur Durchführung von arithmetischen Operationen</u>

Addition:

1) Halbaddierer

Addiert zwei einstellige Binärzahlen. Das Ergebnis ist ein Summenbit (S) und ein Übertragsbit (C).

Funktionstabelle:

A	B	S	C
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	0	1

$$y_S = \left(A \cdot \overline{B}\right) + \left(\overline{A} \cdot B\right) = A \neq B$$

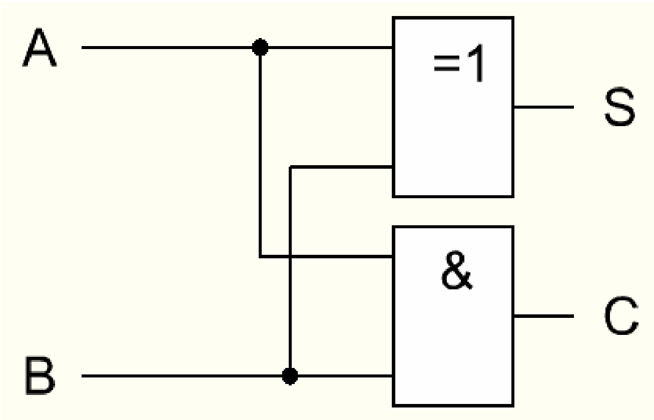
$$y_C = \left(A \cdot B\right)$$

KV-Diagramm für S:

A / B	0	1
0	0	1
1	1	0

=> keine Vereinfachung notwendig

Logikplan des Halbaddierers



2) Volladdierer

Addiert zwei einstellige Binärzahlen sowie ein eingehendes Übertragsbit (C_{IN}) und erzeugt als Ergebnis ein Summenbit (S) und ein (ausgehendes) Übergangsbit (C_{OUT}).

Funktionstabelle

A	B	C_{IN}	S	C_{OUT}
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

KV-Diagramm „S“:

		A	A	
	0	1	0	1
B	1	0	1	0
			C	C

=> keine Minimierung möglich

$$
\begin{aligned}
y_S &= \left(A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C_{IN}}\right)+\left(\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C_{IN}}\right)+\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C_{IN}\right)+\left(A\cdot B\cdot C_{IN}\right)\\
&=\overline{A}\cdot\left(\left(\overline{B}\cdot C_{IN}\right)+\left(B\cdot\overline{C_{IN}}\right)\right)+A\cdot\left(\left(\overline{B}\cdot\overline{C_{IN}}\right)+\left(B\cdot C_{IN}\right)\right)\\
&=\overline{A}\cdot\left(B\neq C_{IN}\right)+A\cdot\left(B\equiv C_{IN}\right)\\
&=\left(\overline{A}\cdot x\right)+\left(A\cdot\overline{x}\right)=A\neq x \qquad \left(x=\left(B\neq C_{IN}\right)\right)
\end{aligned}
$$

damit ergibt sich: $S=A\neq\left(B\neq C_{IN}\right)=\left(A\neq B\right)\neq C_{IN}$

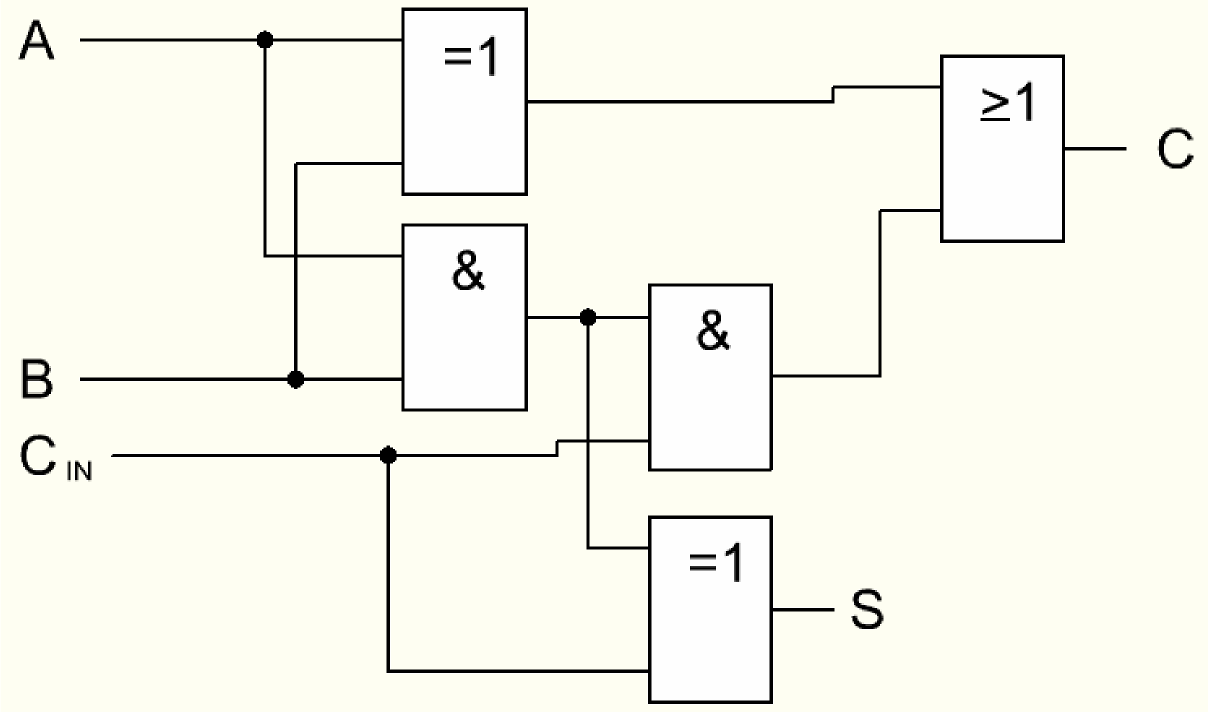
C_{OUT} im KV-Diagramm:

		A	A	
	0	0	1	0
B	0	1	1	1
			C	C

Bemerkung: Damit anschließende algebraische Minimierung einfacher wird!

$$
\begin{aligned}
y_{C_{OUT}} &= \left(A\cdot B\right)+\left(\overline{A}\cdot B\cdot C_{IN}\right)+\left(A\cdot\overline{B}\cdot C_{IN}\right)\\
&=\left(A\cdot B\right)+C_{IN}\left(\left(\overline{A}\cdot B\right)+\left(\overline{B}\cdot A\right)\right)\\
&=\left(A\cdot B\right)+C_{IN}\left(A\neq B\right)
\end{aligned}
$$

Logikplan des Volladdierers:



ACHTUNG: Jene Version ist die aus der Vorlesung. Sie hat aber einen Fehler. Die ersten beiden Gatter von links aus gesehen müssen umgekehrt sein, d.h. Oben muss das AND und darüber die Antivalenz stehen.

Ein Volladdierer besteht aus zwei Halbaddierern.

Symbol des Volladdierers: