2. Umformungen (transformations)

2.1 Verschiebung (translation)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{e} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{\Delta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\,' = \vec{a} + \vec{\Delta},\ \vec{e}\,' = \vec{e} + \vec{\Delta}$$

$$\vec{a}\,' = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{e}\,' = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

➔ Ein starrer Körper verändert seine Form nicht, sondern wird komplett ohne Drehung verschoben.

2.2 Drehung (rotation)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{e} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\,' = \begin{pmatrix} a_x\,' \\ a_y\,' \end{pmatrix},\ \vec{e}\,' = \begin{pmatrix} e_x\,' \\ e_y\,' \end{pmatrix}$$

➔ Drehung mit Rotationswinkel $\phi = 90°$

Wie werden Rotationskoordinaten für jeden beliebigen Winkel ϕ berechnet?

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \quad \left(\text{kartesische Koordinaten}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ \left(r^2 = x^2 + y^2\right) \quad \left(\text{Polarkoordinaten}\right)$$

$$\tan\left(\varphi\right) = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x = r \cdot \cos\left(\varphi\right),\ y = r \cdot \sin\left(\varphi\right) \quad \left(\text{Umformungsformeln}\right)$$

Ein beliebiger Rotationswinkel δ ergibt sich zu $\delta = \varphi + \theta$.

$$\Rightarrow x = r \cdot \cos\left(\varphi + \theta\right),\ y = r \cdot \sin\left(\varphi + \theta\right)$$

Additionstheoreme:

$$\cos\left(\varphi + \phi\right) = \cos\left(\varphi\right) \cdot \cos\left(\phi\right) - \sin\left(\varphi\right) \cdot \sin\left(\phi\right)$$

$$\sin\left(\varphi + \phi\right) = \cos\left(\varphi\right) \cdot \sin\left(\phi\right) - \sin\left(\varphi\right) \cdot \cos\left(\phi\right)$$

$$x' = r \cdot \left(\cos\left(\varphi\right) \cdot \cos\left(\phi\right) - \sin\left(\varphi\right) \cdot \sin\left(\phi\right)\right) = r \cdot \cos\left(\varphi\right) \cdot \cos\left(\phi\right) - r \cdot \sin\left(\varphi\right) \cdot \sin\left(\phi\right)$$

$$y' = r \cdot \left(\cos\left(\varphi\right) \cdot \sin\left(\phi\right) - \sin\left(\varphi\right) \cdot \cos\left(\phi\right)\right) = r \cdot \cos\left(\varphi\right) \cdot \sin\left(\phi\right) - r \cdot \sin\left(\varphi\right) \cdot \cos\left(\phi\right)$$

$$x' = x \cdot \cos(\phi) - y \cdot \sin(\phi)$$
$$y' = x \cdot \sin(\phi) - y \cdot \cos(\phi)$$
$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\vec{p}\,' = R_\theta \cdot \vec{p}$$

Die Rotation eines Punktes im Raum wird durch die Multiplikation von Koordinaten mit einer Rotationsmatrix durchgeführt.

Matrizenmultiplikation

$$C = A \cdot B$$
$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} + b_{jk}$$

Beispiele:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 23 & -4 \end{pmatrix}$

(2) – (4) → siehe Arbeitsblatt

Regel: Die Anzahl der Spalten von Matrix A muss der Anzahl der Zeilen bei Matrix B entsprechen.

(5) Multiplikation einer Matrix M mit einem kompatiblen Vektor:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ M \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(6) Multiplikation des Vektors $\vec{w}$ der Matrix M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ \vec{w} \cdot M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mathematisch gesehen darf eine Drehung immer um den Ursprung herum passieren.
Lösung dieses Problems:

- Dreh- und Angelpunkt definieren ($\vec{p}$)
- Verschieben des gesamten Körpers, sodass sich der Dreh- und Angelpunkt im Ursprung befindet ($-\vec{\Delta} = -\begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix}$)
- Drehung jedes Punktes des Körpers mit derselben Rotationsmatrix R_θ für alle i's → $p_i' = R_\theta \cdot p_i$

- Verschieben des Körpers, sodass sich der Dreh- und Angelpunkt wieder an seinem ursprünglichen Ort befindet ($\vec{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix}$)