Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabe:
Lösen Sie die Differentialgleichung und prüfen Sie das Ergebnis durch die Probe.

$$x^2 \cdot f(x) - x \cdot f'(x) = x^4$$

Zunächst formt man die Differentialgleichung so um, dass f(x) alleine steht. Da in allen Summanden der Faktor x steckt, kann man durch Teilen mit x^2 die DGL vereinfachen:

$$f(x) - \frac{f'(x)}{x} = x^2$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$f(x) - \frac{f'(x)}{x} = 0 \Rightarrow f(x) = y$$

$$y - \frac{y'}{x} = 0 \quad \Big| : y'$$

$$\frac{y}{y'} - \frac{1}{x} = 0 \quad \Big| + \frac{1}{x}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{1}{x} \quad \Big| \rightarrow Kehrwert$$

$$\int \frac{y'}{y} dy = \int x \, dx$$

$$\ln(y) = \frac{1}{2}x^2 + c \quad \Big| \rightarrow \cdot e^x$$

$$y = e^{\frac{1}{2}x^2 + c} \Rightarrow y = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^c$$

$$\underline{y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}}$$

Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL:

$$f(x) - \frac{f'(x)}{x} = x^2$$

$$Ansatz: c(x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \quad (Variation\ der\ Konstanten)$$

Der Ansatz wird in die inhomogene DGL $f(x)-\frac{f'(x)}{x}=x^2$ eingesetzt:

$$c(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}-\frac{1}{x}\cdot\left(c'(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}+x\cdot c(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}\right)=x^2$$

$$c(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}-\frac{1}{x}\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}-c(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}=x^2$$

$$-\frac{1}{x}\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}=x^2$$

$$c'(x)=-x^3\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$c(x)=-\int x^3\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \rightarrow Problem: e^{-\frac{1}{2}x^2}\ ist\ alleinstehend\ nicht\ integrierbar$$

$$=-\int x^2\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$=x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}+2\cdot\int x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$=x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}+2\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Das angezeigte Problem lässt sich durch geschicktes Umformen lösen, indem man den Faktor x mitbenutzt. Man nutzt dabei aus, dass man die Ableitung von $e^{\frac{1}{2}x^2}$ zuvor schon berechnet hat. Man weiß also, dass

$e^{\frac{1}{2}x^2}$ abgeleitet $x\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ ist. Da das Integral dieses umkehrt, kann man sich den Term so zurecht bauen, dass man das Ergebnis ohne Probleme bestimmen kann, weil man es über die Ableitung bereits ermittelt hat. Dadurch werden die letzten Schritte der Berechnung von c(x) so einfach.

Nun muss man c(x) in den Ansatz einsetzen, um die partikuläre Lösung zu ermitteln:

$$Ansatz: c(x)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\rightarrow\left(x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}+2\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}=x^2+2$$

$$RECHNUNGSSCHRITT:$$

$$e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}=\frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{e^{\frac{1}{2}x^2}}=1$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich aus Addition der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und der partikulären Lösung der inhomogenen DGL:

$$f(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + 2 + x^2$$

Probe:
Dazu setzt man in die vorgegebene DGL die entsprechenden Werte für f(x) und f'(x) ein.

$$x^2 \cdot \left(C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + 2 + x^2 \right) - x \cdot \left(C \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + 2x \right) = x^4$$

$$x^2 \cdot C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + 2x^2 + x^4 - x^2 \cdot C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} - 2x^2 = x^4$$

$$x^4 = x^4$$