4. Differentialgleichungen

4.1 Der Begriff der Differentialgleichung

Beispiel:

Ein Scheinwerfer wirft Licht auf eine reflektierende Fläche (Spiegel). Der Scheinwerfer befindet sich im Koordinatenursprung. Gesucht ist die Funktion y=f(x), welche den Rand eines Spiegels beschreibt, der das einfallende Licht parallel zurückwirft.

Einfallswinkel α:

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{e}\cdot\vec{n}}{|\vec{e}|\cdot|\vec{n}|}$$

$$=\frac{x\cdot 1+y\cdot\left(-\frac{1}{y'}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{y'}\right)^2}}=\frac{x\cdot y'-y}{y'\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{\frac{(y')^2+1}{(y')^2}}}=\frac{y-x\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{(y')^2+1}}$$

Ausfallswinkel β:

$$\cos(\beta)=\frac{\vec{a}\cdot-\vec{n}}{|\vec{a}|\cdot|-\vec{n}|}$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{y'}\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{y'}\end{pmatrix}\right|}=\frac{-\frac{1}{y'}}{1\cdot\sqrt{1+\frac{1}{(y')^2}}}=\frac{1}{y'\cdot\frac{\sqrt{(y')^2+1}}{\sqrt{(y')^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

Reflektionsgesetz: $\alpha=\beta \quad\Rightarrow\quad \cos(\alpha)=\cos(\beta)$

$$\frac{y-x\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{(y')^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$y-xy'=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$xy'=y-\sqrt{x^2+y^2}$$

$$y'=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

Gesucht ist eine Funktion y=f(x), sodass für alle $x \in D(f)$ gilt:

$$f'(x) = \frac{f(x) + \sqrt{x^2 + (f(x))^2}}{x}$$

Ende des Beispiels!!

Allgemein: Gegeben ist die explizite DGL erster Ordnung.

$$\boxed{y' = F(x, y)}$$

Gesucht sind alle Funktionen y=f(x), sodass $f'(x) = F(x, f(x))$ für alle $x \in D$ gilt.

In unserem Beispiel ist $F(x, y) = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$.

Beispiel: freier Fall mit Reibung

Fällt ein Körper der Masse m mit der Geschwindigkeit v, so wirkt auf ihn die Reibungskraft $F_R = \beta \cdot v^2$ (β = Proportionalitätskonstante)
Für das Weg-Zeit-Gesetz x=x(t) der Masse m gilt

$$m\ddot{x} = -\beta(\dot{x})^2 + mg$$

$$\boxed{m\ddot{x} + \beta(\dot{x})^2 - mg = 0}$$

Gesucht ist eine Weg-Zeit-Funktion x=f(t) mit

$$m \cdot f''(t) + \beta \cdot (f'(t))^2 - m \cdot g = 0 \qquad \text{für alle } t \in D(f).$$

Es handelt sich um eine implizite DGL 2. Ordnung.
Allgemein:

$$\boxed{F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0}$$

heißt eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung in impliziter Form.

Beispiel: Radioaktivität

Modellvorstellung:
Im einem bestimmten Zeitintervall Δt hat jedes Atom dieselbe Wahrscheinlichkeit zu zerfallen.

ΔN = Anzahl der im Zeitintervall Δt zerfallenden Atome
N(t) = Anzahl der zum Zeitpunkt t vorhandenen Atome

$$\Delta N \sim N(t) \quad und \quad \Delta N \sim \Delta t$$
$$\Rightarrow \Delta N \sim N(t) \cdot \Delta t$$

Mit der Proportionalitätskonstante $\lambda > 0$ gilt

$$\Delta N = -\lambda \cdot N(t) \cdot \Delta t$$
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda \cdot N(t)$$
$$N'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = -\lambda \cdot N(t)$$

Eine Lösung der DGL $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$ ist $N(t) = e^{-\lambda t}$.
Probe:

$$N'(t) = -\lambda \cdot e^{-\lambda t} = -\lambda \cdot N(t) \qquad für \; alle \; t.$$

Die DGL $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$ besitzt die unendlich vielen Lösungen

$$\boxed{N(t) = c \cdot e^{-\lambda t}} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Für t=0 gilt $N(0) = c \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = c$.

Durch Vorgabe eines Wertes $N(t_0)$ für $t = t_0$ (Anfangsbedingung) wird aus den unendlich vielen Lösungen eine ausgewählt. Sie heißt spezielle oder partikuläre Lösung. Die Lösung $N(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$ heißt allgemeine Lösung mit der Integrationskonstante c.

4.2 Einige Lösungsmethoden für DGLn 1. Ordnung

Beispiel: $y' = x - y + 1$

$y \diagdown x$	-2	-1	0	1	2
-2	1	2	3	4	5
-1	0	1	2	3	4
0	-1	0	1	2	3
1	-2	-1	0	1	2
2	-3	-2	-1	0	1

➔ Probe: $y' = 1$

$x - y + 1 = x - x + 1 = 1$

Differentialgleichungen vom Typ „Trennung der Veränderlichen“

Beispiel: Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$y' = \frac{1+2x^2}{2xy^2}; \quad y(1) = 1$$

$$2y^2 y' = \frac{1+2x^2}{x} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx} \right)$$

$$2y'dy = \frac{1+2x^2}{x} dx$$

$$\int 2y'dy = \int \frac{1+2x^2}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x} \right)^2 dx$$

$$\frac{2}{3} y^3 = \ln(|x|) + x^2 + c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$y^3 = \frac{3}{2} \cdot \ln(|x|) + \frac{3}{2} \cdot x^2 + c$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \ln(|x|) + \frac{3}{2} \cdot x^2 + c}$$

für $y(1) = 1$

$$1 = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \ln(|1|) + \frac{3}{2} \cdot 1^2 + c}$$

$$1^3 = \frac{3}{2} + c \qquad \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$1 = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \ln(|x|) + \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2}}$$

Bei Anfangswertproblemen wird nur die Umgebung des Anfangswerts betrachtet $\left(hier\ \ y(1)=1\right)$ deswegen $\ln\left(|x|\right)\to\ln(x)$.

Algorithmus zur Lösung von DGLn des Typs „Trennung der Veränderlichen“

$$h(y)\,y' = g(x)$$
$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

Sei H(y) eine Stammfunktion von h(y) und G(x) eine von g(x). Dann gilt:

$$H(y) = G(x) + c$$

Löse, falls möglich, die Gleichung nach y auf.
Probe:

$$\frac{dy}{dx}H(y) = \frac{d}{dx}\left(G(x)+c\right)$$
$$H'(y)\cdot y' = G'(x)$$
$$h(y)\cdot y' = g(x)$$

Beispiele:
(1)

$$y' = e^{2x-3y} \qquad ; \quad y(0) = \frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$y' = \frac{e^{2x}}{e^{3y}}$$
$$e^{3y}\cdot y' = e^{2x}$$
$$e^{3y}\cdot\frac{dy}{dx} = e^{2x}$$
$$\int e^{3y}dy = \int e^{2x}dx$$
$$\frac{1}{3}\cdot e^{3y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$
$$e^{3y} = \frac{3}{2}e^{2x} + c \quad |\ln(\ \ )$$
$$3y = \ln\left(\frac{3}{2}e^{2x} + c\right)$$
$$y = \frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}e^{2x} + c\right) \qquad (\text{allg. Lösung})$$

Einsetzen des Anfangswerts:

$$y(0)=\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right):$$

$$\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}e^{2x}+c\right)$$

$$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\cdot 1+c \qquad\qquad \Rightarrow c=0$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$y(x)=\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\cdot e^{2x}\right)=\frac{1}{3}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(e^{2x}\right)\right)$$

$$y(x)=\frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{3}\cdot x$$

(2)

$$y'=e^{x^2}\cdot\sin(y)\ ,\quad y(0)=\pi$$

$$\frac{1}{\sin(y)}\cdot y'=e^{x^2}$$

$$\int\frac{1}{\sin(y)}dy=\int e^{x^2}dx$$

Die Lösung des AWP lautet $y(x)=\pi$

Probe:

$$y'=0\quad und\quad e^{x^2}\cdot\sin(y)=e^{x^2}\cdot\sin(\pi)=0$$