Differentialgleichungen vom Typ „Trennung der Veränderlichen“

$$\boxed{h(y)\cdot y' = g(x)}$$

Die x und y homogene DGL

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$SUB:$$

$$z := \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = x\cdot z$$

$$y' = (x\cdot z)' = z + x\cdot z'$$

$$z + x\cdot z' = h(z)$$

$$\boxed{z' = \frac{h(z)-z}{x}} \qquad (Typ: Trennung\ der\ Veränderlichen)$$

Beispiel:

$$y' = \frac{x^2+y^2}{x\cdot y} \qquad ; \quad y(1) = 1$$

$$y' = \frac{x^2}{x\cdot y} + \frac{y^2}{x\cdot y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

$$z := \frac{y}{x}$$

$$z + x\cdot z' = y'$$

$$z + x\cdot z' = \frac{1}{z} + z$$

$$z' = \frac{1}{x\cdot z}$$

$$z\cdot z' = \frac{1}{x}$$

$$\int z\,dz = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{z^2}{2} = \ln(|x|) + c$$

$$z^2 = 2\cdot \ln(|x|) + c$$

$$z = \pm\sqrt{\ln(x^2) + c}$$

Einsetzen des AWP $z(1)=\frac{y(1)}{1}=1$ ergibt

$$1=\pm\sqrt{\ln\left(1^2\right)+c}$$
$$1=c$$

$$z(x)=\sqrt{1+\ln\left(x^2\right)}$$
$$y(x)=x\cdot z(x)$$
$$=x\cdot\sqrt{1+\ln\left(x^2\right)}$$

Fortsetzung des „Scheinwerfer“-Beispiels

$$y'=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad (\text{Typ: homogen in x und y})$$

$$SUB:$$

$$z=\frac{y}{x} \quad , \quad z+x\cdot z'=y'$$

$$z+x\cdot z'=z-\sqrt{1+z^2}$$

$$z'=\frac{-\sqrt{1+z^2}}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\cdot z'=-\frac{1}{x} \qquad (Typ:\text{"}Trennung\ der\ Veränderlichen\text{"})$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,dz=-\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=-\ln\left(|x|\right)+c$$

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)+c$$

$$e^{\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)}=e^{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}\cdot e^c$$

$$\sqrt{1+z^2}=\frac{c}{|x|}-z$$

$$1+z^2=\frac{c^2}{x^2}-2\cdot\frac{c}{x}\cdot z+z^2 \qquad (c\in\mathbb{R})$$

$$2\cdot\frac{c}{2x}\cdot z=\frac{c^2}{x^2}-1$$

$$z=\frac{c}{2x}-\frac{x}{2c}$$

$$y = x \cdot z = \frac{c}{2} - \frac{x^2}{2c}$$

Anfangsbedingung $y(0) = 1$

$$1 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2$$

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$$

Der Scheinwerfer entsteht durch Rotation der Parabel $y(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ um die y-Achse.

<u>Lineare DGL erster Ordnung</u>

$$\boxed{y' = p \cdot x \cdot y + q \cdot x} \qquad mit\ zwei\ stetigen\ Funktionen\ p(x) und\ q(x)$$

Die zugehörige homogene DGL lautet:

$$\boxed{y' = p(x) \cdot y} \qquad (Typ: \text{"}Trennung\ der\ Veränderlichen\text{"})$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = p(x)$$

Satz:

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung

$$y' = p(x) \cdot y + q(x)$$

ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Beispiel:

$$y' = x - y + 1 = -y + x + 1$$

$$p(x) = -1$$

$$q(x) = x + 1$$

zugehörige homogene DGL:

$$y' = -y$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int 1 dx$$

$$\ln(|y|) = -x + c$$

$$|y| = e^{-x} \cdot e^{c}$$

$$y_h(x) = c \cdot e^{-x}$$

Aus dem Richtungsfeld ergab sich $y_p(x) = x$.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $y' = x - y + 1$ lautet

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot e^{-x} + x$$

Variation der Konstanten zur Bestimmung der partikulären Lösung:

Ansatz: $y_p(x) = c(x) \cdot e^{-x}$

Setze diesen Ansatz samt seiner Ableitung

$$y_p'(x) = c'(x) \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}$$

in die inhomogene DGL $y' = -y + x + 1$ ein.

$$c'(x) \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x} = -c(x) \cdot e^{-x} + x + 1$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} = x + 1$$

$$c'(x) = (x+1) \cdot e^{x}$$

$$c(x) = \int (x+1) \cdot e^{x} dx = (x+1) \cdot e^{x} - \int e^{x} dx = x \cdot e^{x}$$

$$y_p(x) = x \cdot e^{x} \cdot e^{-x} = x$$

Beispiel: Schwingkreis

Wechselspannung: $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$

Schalter S wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ geschlossen.

2. Kirchhoffsches Gesetz $U(t) = U_R(t) + U_L(t)$

$$U_0 \cdot \sin(\omega t) = R \cdot I(t) + L \cdot \dot{I}(t)$$

$$\dot{I} = -\frac{R}{L} \cdot I + \frac{U_0}{L} \cdot \sin(\omega t) \qquad I(t_0) = 0$$

zugehörige inhomogene DGL:

$$\dot{I} = -\frac{R}{L} \cdot I$$

$$I_h(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\int \frac{1}{I} dI = -\frac{R}{L} \cdot \int 1 dt$$

$$\ln(|I|) = -\frac{R}{L} \cdot t + c$$

$$|I| = e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot e^{c}$$

$$I = e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot I_0$$

Variation der Konstanten zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL

$$I_p(t) = I_0(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$
$$\dot{I}_p(t) = \dot{I}_0(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} - \frac{R}{L} I_0(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Einsetzen des Ansatzes samt Ableitung in die inhomogene DGL

$$\dot{I} = -\frac{R}{L} \cdot I + \frac{U_0}{L} \cdot \sin(\omega t)$$
$$\dot{I}_0(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} - \frac{R}{L} \cdot I_0(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = -\frac{R}{L} \cdot I_0(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U_0}{L} \cdot \sin(\omega t)$$
$$\dot{I}_0 = \frac{U_0}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \sin(\omega t)$$
$$I_0 = \frac{U_0}{L} \cdot \int e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \sin(\omega t)\, dt$$
$$I_0 = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \cdot \left(\frac{R}{L} \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t) \right)$$
$$= \frac{U_0}{L} \cdot \frac{L^2 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \left(\frac{R}{L} \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t) \right)$$
$$= \frac{U_0}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \left(\frac{R}{L} \cdot \sin(\omega t) - (\omega L) \cdot \cos(\omega t) \right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$
$$I_p(t) = I_0(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U_0}{R^2 + (\omega L)^2} \left(R \cdot \sin(\omega t) - (\omega L) \cdot \cos(\omega t) \right)$$
$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U_0}{R^2 + (\omega L)^2} \left(R \cdot \sin(\omega t) - (\omega L) \cdot \cos(\omega t) \right)$$

Anfangsbedingung:

$$I(0) = 0$$
$$0 = I_0 + \frac{U_0}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot (-\omega L) \qquad \Rightarrow \qquad I_0 = \frac{U_0 \cdot \omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Stromstärke im Schwingkreis:

$$I(t) = \frac{U_0 \cdot \omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \left(e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + R \cdot (\omega L) \cdot \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \right)$$