Exakte Differentialgleichungen

Definition:
Eine DGL vom Typ

$$\boxed{P(x,y)+Q(x,y)\cdot y'=0}$$

heißt exakt, wenn das auf einer offenen Menge $U\subseteq\mathbb{R}^2$ definierte Vektorfeld $k(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ ein Potential $F(x,y)$ besitzt, das ist eine Funktion $F:U\to\mathbb{R}$ mit

$$\boxed{k(x,y)=grad\ F(x,y)}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} F_x(x,y)&=P(x,y)\\ F_y(x,y)&=Q(x,y) \end{aligned}$$

Formale Schreibweise für eine exakte DGL:

$$\begin{aligned} P(x,y)+Q(x,y)\cdot\frac{dy}{dx}&=0\\ P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy&=0\\ \Rightarrow F_x(x,y)\,dx+F_y(x,y)\,dy&=0\\ \Rightarrow dF&=0 \qquad \left(\to 3.3\ \textit{Das totale Differential}\right)\\ \Rightarrow F(x,y)&=const. \end{aligned}$$

Falls $P(x,y)+Q(x,y)\cdot y'=0$ exakt ist, gilt

$$\begin{aligned} P_y(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}P(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}F_x(x,y)=F_{xy}(x,y)\\ &=F_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}F_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)\\ &=Q_x(x,y) \end{aligned}$$

Satz:
Sei $k(x,y)=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ ein stetiges, differenzierbares Vektorfeld auf einer sog. sternförmigen Menge $G\subseteq\mathbb{R}^2$.
Dann ist die DGL

$$P(x,y)+Q(x,y)\cdot y'=0$$

genau dann exakt, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\boxed{P_y(x,y)=Q_x(x,y)}$$

erfüllt ist.

Beispiel:

(1) Jede DGL vom Typ „Trennung der Veränderlichen“ lässt sich in eine exakte DGL umschreiben.

$$h(y)\cdot y' = g(x) \qquad (Typ: \text{"}Trennung\ der\ Veränderlichen\text{"})$$

$$-g(x)+h(y)\cdot y' = 0$$

$$P(x,y) = -g(x) \quad und \quad Q(x,y) = h(y)$$
$$P_y(x,y) = 0 \quad und \quad Q_x(x,y) = 0$$
$$\Rightarrow -g(x)+h(y)\cdot y' = 0 \ ist\ exakt$$

(2)

$$y\cdot\cos(x)-\sin(x)+\sin(x)\cdot y' = 0 \qquad ; \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$P(x,y) = y\cdot\cos(x)-\sin(x) \qquad Q(x,y) = \sin(x)$$
$$P_y(x,y) = \cos(x) = Q_x(x,y)$$

$$\Rightarrow Es\ existiert\ ein\ Potential\ F(x,y), d.h.$$
$$F_x(x,y) = P(x,y) = y\cdot\cos(x)-\sin(x)$$
$$F_y(x,y) = Q(x,y) = \sin(x)$$

$$F(x,y) = \int y\cdot\cos(x)-\sin(x)\,dx = y\cdot\sin(x)+\cos(x)+C(y)$$
$$C(y) = F(x,y)-y\cdot\sin(x)-\cos(x)$$
$$C'(y) = F_y(x,y)-\sin(x) = \sin(x)-\sin(x) = 0$$
$$\Rightarrow C(y) = C = const.$$

$$Wir\ wählen\ C = 0\ und\ erhalten$$
$$F(x,y) = y\cdot\sin(x)+\cos(x) = c \qquad (c \neq C)$$
$$\Rightarrow y\cdot\sin(x) = c-\cos(x)$$
$$\Rightarrow y = \frac{c-\cos(x)}{\sin(x)} \qquad (allgemeine\ Lösung\ der\ DGL)$$

$$0 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{c-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \qquad \Rightarrow c = 0$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = -\cot(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)}$$

(3)

$$xy^2 + y - xy' = 0 \qquad ; \qquad y(1) = 2$$

$$P(x,y) = xy^2 + y \qquad Q(x,y) = -x$$

$$P_y(x,y) = 2xy + 1 \;\neq\; -1 = Q_x(x,y)$$

$$\Rightarrow Die\ DGL\ ist\ nicht\ exakt$$

Multiplikation der DGL mit einem integrieremdem Faktor $\mu(x,y)$ liefert

$$(xy^2 + y) \cdot \mu(x,y) - x \cdot \mu(x,y)\, y' = 0$$

Bestimme $\mu(x,y)$ so, dass die DGL $(xy^2 + y) \cdot \mu(x,y) - x \cdot \mu(x,y)\, y' = 0$ exakt ist.

Ansatz:

$$\mu(x,y) = \mu(y)$$

$$P(x,y) = (xy^2 + y) \cdot \mu(y) \qquad Q(x,y) = -x \cdot \mu(y)$$

$$P_y(x,y) = (2xy + 1) \cdot \mu(y) + (xy^2 + y) \cdot \mu'(y)$$

$$Q_x(x,y) = -\mu(y)$$

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

$$(2xy + 1) \cdot \mu(y) + (xy^2 + y) \cdot \mu'(y) = -\mu(y)$$

$$\begin{aligned}
(xy^2 + y) \cdot \mu'(y) &= -2xy \cdot \mu(y) - \mu(y) - \mu(y) \\
&= -2xy \cdot \mu(y) - 2 \cdot \mu(y) \\
&= -2 \cdot \mu(y) \cdot (xy + 1) \\
\mu'(y) &= \frac{(xy+1)}{xy^2 + y} \cdot (-2 \cdot \mu(y)) \\
&= \frac{(xy+1)}{(xy+1) \cdot y} \cdot (-2 \cdot \mu(y)) \\
&= -\frac{2}{y} \cdot \mu(y) \quad (Typ: "Trennung\ der\ Veränderlichen")
\end{aligned}$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = -\int \frac{2}{y}\, dy$$

$$\ln(|\mu|) = -2 \cdot \ln(|y|) + C = \ln\left(\frac{1}{y^2}\right) + C$$

$$|\mu| = \frac{1}{y^2} \cdot e^C$$

$$\mu(y) = \frac{k}{y^2} \quad mit \quad k = \pm e^C \qquad\qquad (k = 0 \;\; würde \;\; nicht \;\; weiterführen)$$

Wähle $k = 1$:

$$\mu(y) = \frac{1}{y^2}$$

Die DGL $\frac{xy^2 + y}{y^2} - \frac{x}{y^2} \cdot y' = 0$ ist exakt.

$$x + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \cdot y' = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \begin{array}{l} P(x,y) = x + \frac{1}{y} \\ Q(x,y) = -\frac{x}{y^2} \end{array}$$

$$P_y(x,y) = -\frac{1}{y^2} = Q_x(x,y)$$

$$F_x(x,y) = x + \frac{1}{y} \qquad\qquad F_y(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$F(x,y) = \int \left(x + \frac{1}{y} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} + C(y)$$

$$C(y) = F(x,y) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{y}$$

$$C'(y) = F_y(x,y) + \frac{x}{y^2} = 0$$

$\Rightarrow C(y) = C$, wähle $C = 0$

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y}$$

$$F(x,y) = c \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{y} = c \Rightarrow \frac{x}{y} = c - \frac{x^2}{2} = \frac{2c - x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{2c - x^2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x}{2c - x^2} \qquad (allgemeine \;\; Lösung \;\; der \;\; Ausgangs\text{-}DGL)$$

$$2 = y(1) = \frac{2}{2c - 1} \Rightarrow 2c - 1 = 1 \Rightarrow c = 1 \qquad Lösung \;\; AWP: \;\; y(x) = \frac{2}{2 - x^2}$$