4.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Beispiel: Schwingkreis mit R,L,C

- Schalter S wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ geschlossen

$$U_0 \cdot \sin(\omega t) = R \cdot I + L \cdot \dot{I} + \frac{Q}{C}$$

$$U_0 \cdot \omega t \cdot \cos(\omega t) = R \cdot \dot{I} + L \cdot \ddot{I} + \frac{1}{C} \cdot I$$

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \cdot \dot{I} + \frac{1}{LC} \cdot I = U_0 \cdot \frac{\omega}{L} \cdot \cos(\omega t)$$

Definition:
$y'' + py' + qy = f(x)$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ heißt eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
$y'' + py' + qy = 0$ heißt die zugehörige homogene DGL.
$f(x)$ heißt Störterm, Störfunktion oder rechte Seite.

Satz:
Die allgemeine Lösung einer linearen DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

ist gleich der Summe $y_h(x) + y_p(x)$ aus der allgemeinen Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL und einer speziellen (partikulären) Lösung y_p der inhomogenen DGL.

Lösen von Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

1.Schritt:
Lösung der zugehörigen homogenen DGL $\boxed{y'' + py' + qy = 0}$

Exponentialansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$, $y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$
Einsetzen in homogene DGL:

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + p \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + q \cdot e^{\lambda x} = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{e^{\lambda x}} \right.$$

charakteristische Gleichung der DGL:

$$\boxed{\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

1.Fall: Aperiodischer Grenzfall $\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=0\right)$

$$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{p}{2}$$

$$y(x)=e^{-\frac{p}{2}x}$$

Reduktion der DGL $y''+py'+qy=0$ durch die Substitution $z(x)=y(x)\cdot e^{\frac{p}{2}x}$.

$$z'(x)=y'(x)\cdot e^{\frac{p}{2}x}+\frac{p}{2}\cdot y(x)\cdot e^{\frac{p}{2}x}=\left(y'(x)+\frac{p}{2}\cdot y(x)\right)\cdot e^{\frac{p}{2}x}$$

$$z''(x)=\left(y''(x)+\frac{p}{2}\cdot y'(x)\right)\cdot e^{\frac{p}{2}x}+\left(y'(x)+\frac{p}{2}\cdot y(x)\right)\cdot\frac{p}{2}\cdot e^{\frac{p}{2}x}$$

$$=\left(y''(x)+p\cdot y'(x)+\frac{p^2}{4}\cdot y(x)\right)\cdot e^{\frac{p}{2}x}$$

$$0=y''+p\cdot y'+q\cdot y=z''\cdot e^{-\frac{p}{2}x}-\frac{p^2}{4}\cdot y+q\cdot y=z''\cdot e^{-\frac{p}{2}x}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)\cdot y$$

$$\Rightarrow z''(x)\cdot e^{-\frac{p}{2}x}=0$$

$$\Rightarrow z''(x)=0$$

$$\Rightarrow z'(x)=\int z''(x)\,dx=\int 0\,dx=C_1$$

$$\Rightarrow z(x)=\int z'(x)\,dx=\int C_1\,dx=C_1\cdot x+C_2$$

$$y(x)=z(x)\cdot e^{-\frac{p}{2}x}=(C_1\cdot x+C_2)\cdot e^{-\frac{p}{2}x}$$

ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

Beispiel:

$$y''-6y'+9y=0$$

$$\lambda^2-6\lambda+9=0$$

$$\lambda_{1,2}=3\pm\sqrt{9-9}=3$$

allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y(x)=(C_1\cdot x+C_2)\cdot e^{3x}$$

Lösen eines AWP: $y''-6y'+9y=0 \quad ; \quad y(0)=1,\ y'(0)=0$

$$\begin{aligned}1=y(0)&=(C_1\cdot 0+C_2)\cdot e^{3\cdot 0}=C_2\\ y'(x)&=C_1\cdot e^{3x}+(C_1\cdot x+C_2)\cdot 3\cdot e^{3x}\\ &=(C_1+3\cdot C_1\cdot x+3\cdot C_2)\cdot e^{3x}\\ 0&=(C_1+3\cdot C_2)=C_1+3\Rightarrow C_1=-3\end{aligned}$$

Die Lösung des AWP lautet:

$$y(x)=(1-3x)\cdot e^{3x}$$

2.Fall: Kriechfall $\left(\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}>0\right)$

$$\lambda_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad \lambda_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL $y''+py'+qy=0$ lautet in diesem Fall

$$\boxed{y(x)=C_1\cdot e^{\lambda_1 x}+C_2\cdot e^{\lambda_2 x}}$$

Beispiel:

$$y''+7y'+10y=0$$

$$\lambda^2+7\lambda+10=0$$

$$\lambda_{1,2}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-10}=-\frac{7}{2}\pm\frac{3}{2}$$

$$\lambda_1=-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=-2$$

$$\lambda_2=-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=-5$$

Die allgemeine Lösung der DGL $y''+7y'+10y=0$ ist

$$y(x)=C_1\cdot e^{-2x}+C_2\cdot e^{-5x}$$

Lösen des AWP:

$$\begin{aligned}0=y(0)&=C_1+C_2\\ y'(x)&=-2\cdot C_1\cdot e^{-2x}-5\cdot C_2\cdot e^{-5x}\\ 1=y'(0)&=-2\cdot C_1-5\cdot C_2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned}C_1+C_2&=0\\ -2\cdot C_1-5\cdot C_2&=1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1=\frac{1}{3},\ C_2=-\frac{1}{3}$$

Die Lösung des AWP ist:

$$y(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{3} \cdot e^{-5x}$$

3.Fall: Schwingfall $\left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q < 0} \right)$

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + i \cdot \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \qquad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - i \cdot \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

$$\alpha := -\frac{p}{2}, \quad \omega := \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

$$\lambda_1 = \alpha + i \cdot \omega \qquad \lambda_2 = \alpha - i \cdot \omega$$

$$y(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} = C_1 \cdot e^{(\alpha + i \cdot \omega)x} + C_2 \cdot e^{(\alpha - i \cdot \omega)x}$$

$$y_1(x) = e^{\alpha x + i \cdot \omega x} = e^{\alpha x} \left(\cos(\omega x) + i \sin(\omega x) \right)$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x - i \cdot \omega x} = e^{\alpha x} \left(\cos(\omega x) - i \sin(\omega x) \right)$$

$$y_1 + y_2 = 2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega x) \Rightarrow \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega x)$$

$$y_1 - y_2 = 2 \cdot i \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega x) \Rightarrow \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega x)$$

Die allgemeine Lösung der DGL $y'' + py' + qy = 0$ lautet in diesem Fall:

$$\boxed{y(x) = C_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega x) + C_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega x)}$$

Beispiel:

$$y'' + 6y' + 10y = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 10} = -3 \pm i$$

$$y(x) = e^{-3x} \left(C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x) \right) \textit{ ist die allgemeine Lösung der DGL}$$

$$y'(x) = -3 \cdot e^{-3x} \left(C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x) \right) + e^{-3x} \left(-C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x) \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = y(0) = C_1$$

$$\pi = y'(0) = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\pi}{2}$$

Die Lösung des AWP lautet

$$y(x) = e^{-3x} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos(x) + \frac{\pi}{2} \cdot \sin(x) \right)$$

Die Methode des speziellen Ansatzes zum Aufsuchen einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL $y''+py'+qy=f(x)$.

Störfunktion	partikuläre Lösung $y_p(x)$
$\left(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n\right)\cdot e^{\gamma x}\cdot\cos(\beta x)$ *oder* $\left(a_0+a_1\cdot x+\ldots+a_n\cdot x^n\right)\cdot e^{\gamma x}\cdot\sin(\beta x)$	$\left(A_0+A_1\cdot x+\ldots+A_n\cdot x^n\right)\cdot x^k\cdot e^{\gamma x}\cdot\cos(\beta x)+$ $\left(B_0+B_1\cdot x+\ldots+B_n\cdot x^n\right)\cdot x^k\cdot e^{\gamma x}\cdot\sin(\beta x)$ $wobei\, k=\begin{cases} 0,\ falls\ \gamma+i\beta\, keine\ Lösung\ d.ch.Gl. \\ 1,\ falls\ \gamma+i\beta\, einfache\ Lösung\ d.ch.Gl. \\ 2,\ falls\ \gamma+i\beta\, zweifache\ Lösung\ d.ch.Gl. \end{cases}$

Beispiele:

(1)

$$y''+11y'-4y=x\cdot\sin(x)$$
$$\gamma+i\beta=i$$
$$\lambda^2+11\lambda-4=0$$

Wegen $i^2+11i-4=-5+11i\neq 0$ ist $k=0$

$$y_p(x)=\left(A_0+A_1\cdot x\right)\cdot\cos(x)+\left(B_0+B_1\cdot x\right)\cdot\sin(x)$$

Die Koeffizienten A_0, A_1, B_0, B_1 bestimmt man durch Einsetzen des Ansatz und seiner Ableitungen in die DGL.

(2)

$$y''+4y'+4y=e^{-2x}$$

$$\gamma+i\beta=-2$$

$$\lambda^2+4\lambda+4=0$$

$$(\lambda+2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad \gamma+i\beta \textit{ ist eine doppelte Nullstelle} \Rightarrow k=2$$

$$y_p(x)=A_0\cdot x^2\cdot e^{-2x}$$

$$y_p'(x)=2\cdot A_0\cdot x\cdot e^{-2x}-2\cdot A_0\cdot x^2\cdot e^{-2x}=2\cdot A_0\cdot e^{-2x}\cdot\left(x-x^2\right)$$

$$y_p''(x)=-4\cdot A_0\cdot e^{-2x}\cdot\left(x-x^2\right)+2\cdot A_0\cdot e^{-2x}\cdot(1-2x)$$

$$=2\cdot A_0\cdot e^{-2x}\cdot\left(-2x+2x^2+1-2x\right)=2\cdot A_0\cdot e^{-2x}\cdot\left(2x^2-4x+1\right)$$

Einsetzen in die Ausgangs-DGL:

$$2\cdot A_0\cdot e^{-2x}\cdot\left(2x^2-4x+1\right)+8\cdot A_0\cdot e^{-2x}\cdot\left(x-x^2\right)+4\cdot A_0\cdot x^2\cdot e^{-2x}=e^{-2x}$$

$$2\cdot A_0\cdot\left(2x^2-4x+1+4x-4x^2+2x^2\right)=1$$

$$2\cdot A_0=1$$

$$A_0=\frac{1}{2}$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ lautet:

$$y_p(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot e^{-2x}$$