Satz:

Seien $p, q, x_0, y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ vergeben und sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall I mit $x_0 \in I$ stetige Funktion, dann hat das AWP

$$y'' + py' + qy = f(x) \;\; ; \;\; y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = v_0$$

genau eine Lösung $y: I \to \mathbb{R}$.

Beispiel:

$$y'' - y = (1+x) \cdot e^{2x} \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0$$

zugehörige homogene DGL:

$$y'' - y = 0$$
$$\lambda^2 - 1 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$$

Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$y_p(x) = (A_0 + A_1 x) \cdot e^{2x}$$
$$y_p'(x) = A_1 \cdot e^{2x} + (A_0 + A_1 x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x}(2A_0 + A_1 + 2A_1 x)$$
$$y_p''(x) = 2 \cdot A_1 \cdot e^{2x} + (2A_0 + A_1 + 2A_1 x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = (4A_0 + 4A_1 + 4A_1 x) \cdot e^{2x}$$

Einsetzen von $y_p(x)$ und $y_p''(x)$ in die Ausgangs-DGL $y'' - y = (1+x) \cdot e^{2x}$:

$$(4A_0 + 4A_1 + 4A_1 x) \cdot e^{2x} - (A_0 + A_1 x) \cdot e^{2x} = (1+x) \cdot e^{2x}$$
$$3A_0 + 4A_1 + 3A_1 x = 1 + x$$

Koeffizientenvergleich:

$$3A_0 + 4A_1 = 1 \;\; (x^0)$$
$$3A_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{1}{3}$$
$$3A_0 = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad A_0 = -\frac{1}{9}$$

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) \cdot e^{2x}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $y'' - y = (1+x) \cdot e^{2x}$ lautet:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) \cdot e^{2x}$$
$$y'(x) = C_1 \cdot e^x - C_2 \cdot e^{-x} + \frac{1}{3} \cdot e^{2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) \cdot 2 \cdot e^{2x} = C_1 \cdot e^x - C_2 \cdot e^{-x} + \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) \cdot e^{2x}$$

Lösung des AWP:

$$0 = y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{9}$$
$$0 = y'(0) = C_1 - C_2 + \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 - \frac{1}{9} \\ +&C_1 - C_2 + \frac{1}{9} \\ &2C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0;\ C_2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Die Lösung des AWP ist:

$$y(x) = \frac{1}{9} \cdot e^{-x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) \cdot e^{2x}$$

Beispiel:

$$y'' - 4y' + 13y = 1 + \sin(x)$$

Superpositionsprinzip:
Gegeben sei die lineare DGL 2. Ordnung mit kostanten Koeffizienten

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

Wenn $f(x) =$ Summe von Störfunktionen, dann wird y_0 angesetzt als Summe spezieller Ansätze für die einzelnen Störfunktionen.

Fortsetzung des Beispiels:

1)

$$y'' - 4y' + 13y = 1$$
$$y_p(x) = A_0 \qquad y_p'(x) = y_p''(x) = 0$$
$$13A_0 = 1 \quad \Rightarrow A_0 = \frac{1}{13}$$
$$y_p(x) = \frac{1}{13}$$

2)

$$y'' - 4y' + 13y = \sin(x)$$
$$y_p(x) = A_0 \cdot \cos(x) + B_0 \cdot \sin(x)$$
$$y_p'(x) = -A_0 \cdot \sin(x) + B_0 \cdot \cos(x)$$
$$y_p'(x) = -A_0 \cdot \cos(x) - B_0 \cdot \sin(x)$$
$$-A_0 \cdot \cos(x) - B_0 \cdot \sin(x) + 4A_0 \cdot \sin(x) - 4B_0 \cdot \cos(x) + 13A_0 \cdot \cos(x) + 13B_0 \cdot \sin(x)$$
$$= \sin(x)$$

$$\left(12A_0-4B_0\right)\cdot\cos(x)+\left(4A_0+12B_0\right)\cdot\sin(x)=\sin(x)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 12A_0-4B_0=0 \;\Rightarrow 4B_0=12A_0 \;\Rightarrow B_0=3A_0 \\ 4A_0+12B_0=1 \;\Rightarrow 4A_0+36A_0=1 \;\Rightarrow A_0=\dfrac{1}{40} \end{array}$$

$$\Rightarrow B_0=3\cdot A_0=\frac{3}{40}$$

$$y_p(x)=\frac{1}{40}\cdot\cos(x)+\frac{3}{40}\cdot\sin(x)$$

Eine partikuläre Lösung der DGL $y''-4y'+13y=1+\sin(x)$ ist

$$y_p(x)=\frac{1}{13}+\left(\frac{1}{40}\cdot\cos(x)+\frac{3}{40}\cdot\sin(x)\right)$$

Bestimmung der Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$$\lambda^2-4\lambda+13=0$$
$$\lambda_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm i3$$
$$y_h(x)=\left(C_1\cdot\cos(3x)+C_2\cdot\sin(3x)\right)\cdot e^{2x}$$

Die allgemeine Lösung der DGL $y''-4y'+13y=1+\sin(x)$ lautet

$$\begin{aligned} y(x)&=y_h(x)+y_p(x)\\ &=\left(C_1\cdot\cos(3x)+C_2\cdot\sin(3x)\right)\cdot e^{2x}+\frac{1}{13}+\frac{1}{40}\cdot\cos(x)+\frac{3}{40}\cdot\sin(x)\end{aligned}$$

Beispiel:

$$y''+y=\frac{1}{\cos(x)};\qquad y(0)=y'(0)=1$$

zugehörige homogene DGL:

$$y''+y=0$$
$$\lambda^2+1=0$$
$$\lambda_{1,2}=\pm i$$
$$y_h(x)=C_1\cdot\cos(x)+C_2\cdot\sin(x)$$

Aufsuchen einer partikulären Lösung durch Variation der Konstanten:

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= C_1(x)\cdot\cos(x)+C_2(x)\cdot\sin(x)\\
y_p'(x) &= C_1'(x)\cdot\cos(x)-C_1(x)\cdot\sin(x)+C_2'(x)\cdot\sin(x)+C_2(x)\cdot\cos(x)\\
&= \left(C_1'(x)+C_2(x)\right)\cdot\cos(x)+\left(C_2'(x)-C_1(x)\right)\cdot\sin(x)\\
y_p''(x) &= \left(C_1''(x)+C_2'(x)\right)\cdot\cos(x)-\left(C_1'(x)+C_2(x)\right)\cdot\sin(x)\\
&\quad+\left(C_2''(x)-C_1'(x)\right)\cdot\sin(x)+\left(C_2'(x)-C_1(x)\right)\cdot\cos(x)\\
&= \left(C_1''(x)+2\cdot C_2'(x)-C_1(x)\right)\cdot\cos(x)+\left(C_2''(x)-2\cdot C_1'(x)-C_2(x)\right)\cdot\sin(x)
\end{aligned}
$$

Einsetzen von y_p und y_p'' in die DGL $y''+y=\frac{1}{\cos(x)}$ liefert

$$
\begin{aligned}
&\left(C_1''(x)+2\cdot C_2'(x)-C_1(x)\right)\cdot\cos(x)+\left(C_2''(x)-2\cdot C_1'(x)-C_2(x)\right)\cdot\sin(x)\\
&+C_1(x)\cdot\cos(x)+C_2(x)\cdot\sin(x)=\frac{1}{\cos(x)}
\end{aligned}
$$

$$
\left(C_1''(x)+2\cdot C_2'(x)\right)\cdot\cos(x)+\left(C_2''(x)-2\cdot C_1'(x)\right)\cdot\sin(x)=\frac{1}{\cos(x)}
$$

$$
\frac{d}{dx}\left(C_1'(x)\cdot\cos(x)+C_2'(x)\cdot\sin(x)\right)+C_2'(x)\cdot\cos(x)-C_1'(x)\cdot\sin(x)=\frac{1}{\cos(x)}
$$

$$
\Leftarrow\begin{array}{l}
C_1'(x)\cdot\cos(x)+C_2'(x)\cdot\sin(x)=0\\
C_2'(x)\cdot\cos(x)-C_1'(x)\cdot\sin(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}
\end{array}
$$

$$
C_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin(x)\\ \dfrac{1}{\cos(x)} & \cos(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos(x) & \sin(x)\\ -\sin(x) & \cos(x)\end{vmatrix}}=\frac{-\sin(x)\cdot\dfrac{1}{\cos(x)}}{\sin^2(x)+\cos^2(x)}=-\tan(x)
$$

$$
C_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos(x) & 0\\ -\sin(x) & \dfrac{1}{\cos(x)}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos(x) & \sin(x)\\ -\sin(x) & \cos(x)\end{vmatrix}}=\frac{\cos(x)\cdot\dfrac{1}{\cos(x)}}{1}=1
$$

$$
\Rightarrow C_1(x)=-\int\tan(x)\,dx=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx=\ln\left(\left|\cos(x)\right|\right)
$$

$$
\Rightarrow C_2(x)=\int 1\,dx=x(+C)
$$

$$
\Rightarrow y_p(x)=\cos(x)\cdot\ln\left(\left|\cos(x)\right|\right)+x\cdot\sin(x)
$$

Allgemeine Lösung der DGL $y''+y=\frac{1}{\cos(x)}$ ist

$$y(x)=C_1\cdot\cos(x)+C_2\cdot\sin(x)+\cos(x)\cdot\ln\left(\left|\cos(x)\right|\right)+x\cdot\sin(x)$$

$$y'(x)=-C_1\cdot\sin(x)+C_2\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot\ln\left(\left|\cos(x)\right|\right)+\cos(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)}+\sin(x)+x\cdot\cos(x)$$

$$0=y(0)=C_1 \qquad \Rightarrow C_1=0$$

$$1=y'(0)=C_2+1 \quad \Rightarrow C_2=0$$

Die Lösung des AWP ist:

$$y(x)=\cos(x)\cdot\ln\left(\cos(x)\right)+x\cdot\sin(x)$$