Zweite partielle Ableitungen

$f_x(x,y)$ nach x ableiten: Ergebnis $f_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$

$f_x(x,y)$ nach y ableiten: Ergebnis $f_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

$f_y(x,y)$ nach x ableiten: Ergebnis $f_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

$f_y(x,y)$ nach y ableiten: Ergebnis $f_{yy}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$

Beispiele:

(1)

$$f(x,y)=x^2\cdot\cos(y)$$
$$f_x=2x\cdot\cos(y)$$
$$f_y=-x^2\cdot\sin(y)$$

$$f_{xx}=2\cdot\cos(y)$$
$$f_{xy}=-2x\cdot\sin(y)$$
$$f_{yx}=-2x\cdot\sin(y)$$
$$f_{yy}=-x^2\cdot\cos(y)$$

(2)

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x+2y}$$
$$f_x=\frac{y^2\cdot(x+2y)-xy^2}{(x+2y)^2}=\frac{xy^2+2y^3-xy^2}{(x+2y)^2}=\frac{2y^3}{(x+2y)^2}$$
$$f_y=\frac{2yx\cdot(x+2y)-2\cdot xy^2}{(x+2y)^2}=\frac{2x^2y+4xy^2-2xy^2}{(x+2y)^2}=\frac{2x^2y+2xy^2}{(x+2y)^2}$$

$$REGEL:$$
$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

Berechnung der zweiten partiellen Ableitungen:

$$f_{xx} = -\frac{2y^3 \cdot 2 \cdot (x+2y)}{(x+2y)^4} = -\frac{4y^3}{(x+2y)^3}$$

$$f_{xy} = \frac{6y^2 \cdot (x+2y)^2 - 2y \cdot 2 \cdot (x+2y) \cdot 2}{(x+2y)^4} = \frac{6y^2 \cdot (x+2y) - 8y^3}{(x+2y)^3} = \frac{6xy^2 + 4y^3}{(x+2y)^3}$$

$$f_{yx} = \frac{4xy + 2y^2 \cdot (x+2y)^2 - (2x^2y + 2xy^2) \cdot 2 \cdot (x+2y)}{(x+2y)^4} = \frac{6xy^2 + 4y^3}{(x+2y)^3}$$

$$\begin{aligned} f_{yy} &= \frac{2x^2 + 4xy \cdot (x+2y)^2 - (2x^2y + 2xy^2) \cdot 4 \cdot (x+2y)}{(x+2y)^4} \\ &= \frac{2x^2 + 4xy \cdot (x+2y) - 8x^2y - 8xy^2}{(x+2y)^3} \\ &= \frac{2x^3 + 4x^2y + 4x^2y + 8xy^2 - 8x^2y - 8xy^2}{(x+2y)^3} = \frac{2x^3}{(x+2y)^3} \end{aligned}$$

Satz von Schwarz:
Seien die zweiten Ableitungen der Funktion $f(x, y)$ stetig. Dann gilt

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

Definition:
Die Funktion $f(x, y)$ habe stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung. Dann heißt

$$H\ f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

die Hesse-Matrix von f an der Stelle (x, y).

3.2 Extrema von Funktionen von zwei Veränderlichen

Definition:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion von zwei Veränderlichen. f hat an der Stelle (x_0, y_0) ein absolutes Minimum, wenn

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

für alle $(x, y) \in D$ gilt und ein absolutes Maximum an der Stelle (x_0, y_0), wenn

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

für alle $(x, y) \in D$ gilt.

Definition:

$U_\varepsilon(x_0,y_0) := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\varepsilon\right\}$ heißt ε-Umgebung von (x_0,y_0).

Eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^2$ heißt eine Umgebung des Punktes $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, wenn es ein $\varepsilon>0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0,y_0)\subseteq U$.

Ein Element (x_0,y_0) von $D\subseteq\mathbb{R}^2$ heißt ein innerer Punkt von D, wenn es eine Umgebung U von (x_0,y_0) gibt mit $U\subseteq D$.

Definition:

Sei $f:D\to\mathbb{R}$ eine Funktion von zwei Veränderlichen. f hat in $(x_0,y_0)\in D$ ein relatives (loakles) Minimum, wenn es eine Umgebung U von (x_0,y_0) gibt, sodass

$f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$ für alle $(x,y)\in D\cap U$ gilt.

Relatives (lokales) Maximum:

$f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$ für alle $(x,y)\in D\cap U$

Notwendiges Kriterium für die Existenz eines Extremums:

Sei $f:D\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit zwei Veränderlichen. Dann kann f im Punkt $(x_0,y_0)\in D$ nur dann – wenn überhaupt – ein Extremum haben, wenn

(1) (x_0,y_0) ein innerer Punkt von D ist und $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ gilt

(2) (x_0,y_0) ein Randpunkt von D, d.h. kein innerer Punkt ist

(3) (x_0,y_0) eine nicht partiell differenzierbare Stelle von f ist (Bsp. Wurzelfunktionen)

Beispiele:

(1)

$$f(x,y)=x^2+y^2-4x+2y+5$$

$$f_x(x,y)=2x-4=0 \qquad \Rightarrow x=2$$
$$f_y(x,y)=2y+2=0 \qquad \Rightarrow y=-1$$

f hat höchstens im Punkt (2,-1) ein Extremum.

$$f(x,y) = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1$$
$$= (x-2)^2 + (y+1)^2 \geq 0$$
$$f(2,-1) = 0$$
$$\Rightarrow f(x,y) \geq f(2,-1) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

f hat an der Stelle (2,-1) ein absolutes Minimum.

(2)

$$f(x,y) = x \cdot y$$
$$f_x(x,y) = y = 0$$
$$f_y(x,y) = x = 0$$

f hat an der Stelle (0,0) kein Extremum (sondern einen Sattelpunkt).

Hinreichendes Kriterium für die Existenz von Extrema von Funktionen von zwei Veränderlichen

(1) Wenn die Determinante der Hesse-Matrix positiv ist, d.h.

$$f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}(x_0,y_0)^2 > 0$$

dann hat f in (x_0, y_0) ein lokales Extremum und zwar

- ein Minimum, falls $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$
- ein Maximum, falls $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$

(2) Wenn $\det H\ f(x_0,y_0) < 0$, dann hat f in (x_0,y_0) kein Extremum

(3) Wenn $\det H\ f(x_0,y_0) = 0$, kann keine Aussage über Extrema in diesem Punkt gemacht werden

Beispiele:

(1)

$$f(x,y) = x \cdot y \qquad f_{xx}(x,y) = 0$$
$$f_x(x,y) = y \qquad f_{xy}(x,y) = 1$$
$$f_y(x,y) = x \qquad f_{yy}(x,y) = 0$$

$$H\ f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det H\ f(0,0) = 0 - 1 = -1 < 0$$

Es gibt an der Stelle (0,0) kein Extremum.

(2)

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y + 1$$

$$f_x(x,y) = 6x - 2y + 2 = 0$$
$$f_y(x,y) = -2x + 2y - 6 = 0$$

Lösung der Gleichungen über die Cramersche Regel

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-4+12}{12-4} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{32}{8} = 4$$

Der einzige Kritische Punkt ist (x_0, y_0) mit den Koordinaten (1,4).

$$f_{xx}(x,y) = 6$$
$$f_{xy}(x,y) = -2$$
$$f_{yy}(x,y) = 2$$
$$H\ f(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det H\ f(1,4) = 12 - 4 = 8 > 0$$

Da $f_{xx}(1,4) > 0$, hat f an der Stelle (1,4) ein relatives Minimum.

(3) oben offene Schachtel
Volumen V = 4 Liter

Für welche (x, y, z) wird die Oberfläche minimal?

$$A = (x \cdot y) + 2xz + 2yz \qquad V = x \cdot y \cdot z = 4dm^2 \quad \Rightarrow z = \frac{4}{y \cdot x}$$

$$A(x,y) = x \cdot y + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}$$
$$A_x(x,y) = y - \frac{8}{x^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \ y = \frac{8}{x^2}$$
$$A_x(x,y) = x - \frac{8}{y^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \ x - \frac{8}{\left(\frac{8}{x^2}\right)^2} = x - \frac{x^4}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^3}{8} = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

$$y = \frac{8}{2^2} = 2$$

Einziger kritischer Punkt $(x, y) = (2, 2)$

$$f_{xx}(x, y) = \frac{16}{x^3} \qquad H\ f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{16}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{16}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$f_{xy}(x, y) = 1$$

$$f_{yy}(x, y) = \frac{16}{y^3}$$

Für $(x, y) = (2, 2)$ ergibt sich $2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3 > 0$. Es existiert an der Stelle (2,2) ein Extremum. Wegen $f_{xx}(2, 2) > 0$ liegt ein relatives Minimum vor.

➔ A hat für x = 20cm und y = 20cm ein relatives Minimum

Berechnung von z:

$$V = x \cdot y \cdot z \qquad \Rightarrow z = \frac{4}{x \cdot y} = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1$$

Es ergibt sich entsprechend z = 10cm.