2. Fourier Reihen

2.1 Unendliche Reihen

Beispiel:
Beim jetzigen Verbrauch halten die Erdölreserven der Welt noch 50 Jahre. Um wie viel Prozent muss der Verbrauch jährlich gesenkt werden, damit die Vorräte ewig reichen?

E = gesamte Erdölreserven
V_0 = derzeitiger Verbrauch
p = unbekannter Prozentsatz

$$V_0 = \frac{E}{50}$$

Verbrauch im nächsten Jahr: $V_1 = V_0 - \frac{p}{100} \cdot V_0 = V_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$

Verbrauch nach 2 Jahren: $V_2 = V_1 - \frac{p}{100} \cdot V_1 = V_1 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = V_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$

Verbrauch nach 3 Jahren: $V_3 = V_2 - \frac{p}{100} \cdot V_2 = V_2 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = V_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^3$

Verbrauch nach n Jahren: $V_n = V_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$

$$q = 1 - \frac{p}{100}$$

$$V_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \ldots + V_n + \ldots = E$$
$$V_0 + V_0 \cdot q + V_0 \cdot q^2 + V_0 \cdot q^3 + \ldots + V_0 \cdot q^n + \ldots = E$$
$$V_0 \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots\right) = E$$
$$V_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = E$$

unendliche geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$$

Berechnung der unendlichen geometrischen Reihe mit Hilfe endlicher Teilsummen:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$
$$-q \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = \quad q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}$$
$$\sum_{k=0}^{n} q^k - q \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}$$
$$\sum_{k=0}^{n} q^k \cdot (1-q) = 1 - q^{n+1}$$

Falls $q \neq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (Rentenformel)$$

Falls $|q| < 1$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$
$$q \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

Summenformel für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad , falls\ |q| < 1$$

Für $|q| \geq 1$ existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$ nicht.

Fortsetzung des Beispiels:

$$V_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = E$$
$$V_0 \cdot \frac{1}{1-q} = E$$
$$\frac{1}{1-q} = \frac{E}{V_0}$$
$$1 - q = \frac{V_0}{E}$$

$$1 - q = \frac{\frac{E}{50}}{E} = \frac{1}{50}$$
$$q = 1 - \frac{1}{50}$$
$$1 - \frac{p}{100} = 1 - \frac{1}{50}$$
$$\frac{p}{100} = \frac{1}{50} \Rightarrow p = 2$$

Der Ölverbrauch müsste jährlich um 2 % reduziert werden, damit die Vorräte sehr, sehr lange halten.

Beispiele:

(1)

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot (0{,}8)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-0{,}8)^k = \frac{1}{1-(-0{,}8)} = \frac{1}{1+0{,}8} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

(2)

$$0{,}\overline{123} = 0{,}123123123\ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{123}{1000^k} = \frac{123}{1000}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}{\frac{1}{1000}}^{k}$$

$$= \frac{123}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{123}{1000}\cdot\frac{1000}{999} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$