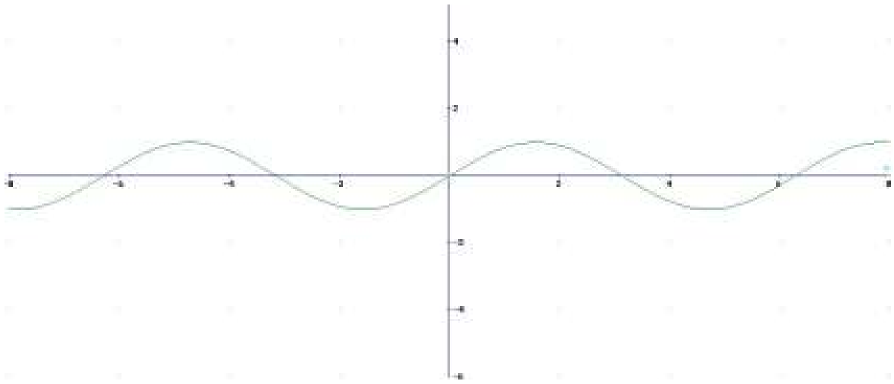
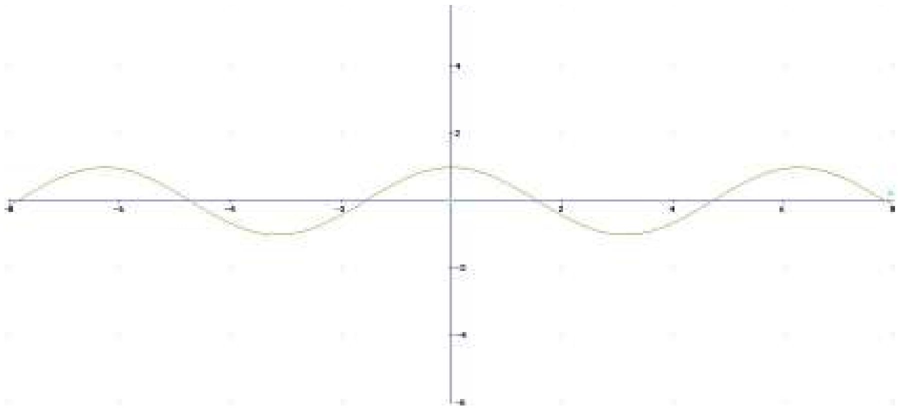
2.3 Periodische Funktionen

Beispiele:
Die Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben die Periode 2π .



$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.



harmonische Schwingung:

$$f(x) = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$$

A = Amplitude
ϖ = Kreisfrequenz
φ = Phasenverschiebung

Periodenbestimmung:

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right) = A \cdot \sin\left(\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right) = A \cdot \sin(\omega x + 2\pi + \varphi)$$
$$= A \cdot \sin(\omega x + \varphi) = f(x)$$

Eine harmonische Schwingung hat die Periode $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Definition:
Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt periodisch mit der Periode T > 0, wenn

$$f(x+T) = f(x)$$

für alle $x\in\mathbb{R}$.

Satz:
Wenn $f_1,\ldots,f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ periodische Funktionen mit der Periode T sind, dann hat auch die Linearkombination

$$f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_n f_n(x)$$

die Periode T.

2.4 Trigonometrische Polynome und Fourier-Reihen

$$\begin{aligned} A\cdot\sin(\omega x+\varphi) &= A\cdot\left(\sin(\omega x)\cdot\cos(\varphi)+\sin(\varphi)\cdot\cos(\omega x)\right) \\ &= a\cdot\cos(\omega x)+b\cdot\sin(\omega x) \qquad \left[a = A\cdot\sin(\varphi), b = A\cdot\cos(\varphi)\right] \end{aligned}$$

Additionstheorem:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)$$

Beschränkung auf Funktionen mit der Periode 2π

Wenn f(x) die Periode T hat, dann hat $F(x) := f\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot x\right)$ die Periode 2π ,denn

$$F(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}\cdot(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}\cdot x+T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}\cdot x\right) = F(x)$$

Umgekehrt gilt: Wenn F(x) die Periode 2π hat, dann hat

$$f(x) := F\left(\frac{2\pi}{T}\cdot x\right)$$

die Periode T, denn

$$f(x+T)=F\left(\frac{2\pi}{T}\cdot(x+T)\right)=F\left(\frac{2\pi}{T}\cdot x+2\pi\right)=F\left(\frac{2\pi}{T}\cdot x\right)=f(x)$$

Definition:

Die Funktion $s_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\cos(kx)+b_k\cdot\sin(kx)\right)$$

heißt ein trigonometrisches Polynom.

Integralformeln:

(1)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cdot\cos(lx)\,dx=\begin{cases}0, \textit{ falls } k\neq l\\ \pi, \textit{ falls } k=l>0\\ 2\pi, \textit{ falls } k=l=0\end{cases}$$

(2)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cdot\sin(lx)\,dx=\begin{cases}0, \textit{ falls } k\neq l \textit{ oder } k=l=0\\ \pi, \textit{ falls } k=l>0\end{cases}$$

(3)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cdot\sin(lx)\,dx=0$$

Approximation:

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\cos(kx)+b_k\cdot\sin(kx)\right)\right)dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx+b_k\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\,dx\right)$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\,dx=\pi\cdot a_0$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}s_n(x)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}s_n(x)\cdot\cos(mx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cdot\cos(mx)\,dx+\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cdot\cos(mx)\,dx$$
$$=\pi\cdot a_m$$

$$a_m=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}s_n(x)\cdot\cos(mx)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}s_n(x)\cdot\sin(mx)\,dx=b_m\cdot\pi$$

$$b_m=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}s_n(x)\cdot\sin(mx)\,dx$$

Definition:
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine 2π – periodische Funktion, die auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ integrierbar ist. Dann heißt die Funktionenreihe

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos(kx)+b_k\cdot\sin(kx)\right)$$

mit

$$a_k=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(kx)\,dx \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$
$$b_k=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin(kx)\,dx \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

die Fourier-Reihe von f(x). Die Zahlen und heißen die Fourier-Koeffizienten von f.

Konvergenzkriterium für Fourier-Reihen
Sei f eine auf $[-\pi,\pi]$ integrierbare und 2π -periodische Funktion, sodass

$$f\left(x_0^+\right)=\lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right) \quad und \quad f\left(x_0^-\right)=\lim_{x\to x_0^-} f\left(x\right)$$

und verallgemeinerte Ableitungen

$$f'\left(x_0^+\right)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0^+\right)}{x-x_0^+} \quad und \quad f'\left(x_0^-\right)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0^-\right)}{x-x_0^-}$$

existieren. Dann konvergiert dir Fourier-Reihe von f an der Stelle gegen das arithmetische Mittel

$$\frac{f\left(x_0^+\right)-f\left(x_0^-\right)}{2}$$

Wenn f in stetig ist, dann gilt

$$f\left(x_0\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos\left(kx\right)+b_k\cdot\sin\left(kx\right)\right)$$

Beispiel:

$$f\left(x_0^+\right)=f\left(x_0^-\right)=f\left(x_0\right)$$
$$f'\left(x_0^+\right)=f'\left(x_0^-\right)=f'\left(x_0\right)$$

$$f\left(x_1^+\right)=-4 \qquad f\left(x_1^-\right)=4$$
$$f'\left(x_1^+\right)=\lim_{x\to x_1^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_1^+\right)}{x-x_1^+}=\lim_{x\to 2\pi^+}\frac{f\left(x\right)-\left(-4\right)}{x-2\pi}$$

Für Fourier-Reihen gerader & ungerader Funktionen

$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cdot\cos\left(kx\right)$, falls f(x) gerade

$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\cdot\sin\left(kx\right)$, falls f(x) ungerade

Anm.

$$a_k=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cdot\cos\left(kx\right)dx \qquad \to \textit{für ungerade Funktionen}=0$$

Beispiel:

Taktsignal einer logischen Schaltung

$$f(x)=\begin{cases} -5,\ falls\ -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ 5,\ falls\ -\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2} \\ -5,\ falls\ \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(kx) \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cdot\cos(kx)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5\cdot\cos(kx)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-5)\cdot\cos(kx)\,dx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(5\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin(kx)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + (-5)\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin(kx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{5}{k}\left(\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(k\cdot-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{5}{k}\cdot\left(\sin\left(k\cdot\frac{3\pi}{2}\right)-\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{10}{k}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{5}{k}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)+\frac{5}{k}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{20}{\pi}\cdot\frac{1}{k}\cdot\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=?$$

$$\sin\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases} 0,\ falls\ k\ gerade \\ (-1)^m,\ falls\ k=2m+1 \end{cases}$$

$$a_{2k+1}=\frac{20}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{2k+1} \qquad \textit{für } k \ge 1 \qquad (\textit{falls } k \textit{ gerade} \rightarrow a_k = 0)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 5\,dx = 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{20}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \qquad \text{für } k \geq 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{20}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \cos(kx) \\ &= \frac{20}{\pi} \cdot \left(\cos(x) - \frac{\cos(3x)}{3} + \frac{\cos(5x)}{5} - \frac{\cos(7x)}{7} \pm \ldots \right) \end{aligned}$$