Beispiel: harmonische Analyse einer Kippspannung

Kippspannung: $U(t) = \frac{A}{T} \cdot t \qquad für \qquad 0 \le t < T$

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T U(t)\,dt = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \frac{A}{T} \cdot t\,dt = \frac{2A}{T^2} \cdot \frac{t^2}{2}\bigg|_0^T = \frac{2A}{T^2} \cdot \frac{T^2}{2} = A$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T U(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt = \frac{2A}{T^2} \cdot \int_0^T t \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \\
&= \frac{2A}{T^2} \cdot \left(t \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{T}} \Bigg|_0^T - \frac{T}{2 \cdot k \cdot \pi} \cdot \int_0^T \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \right) \\
&= -\frac{2A}{T^2} \cdot \frac{T}{2 \cdot k \cdot \pi} \cdot - \frac{\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{T}} \Bigg|_0^T \\
&= -\frac{2A}{T^2} \cdot \frac{T^2}{4 \cdot k^2 \cdot \pi^2} \cdot \left(\cos(k \cdot 2\pi) - \cos(0)\right) \\
&= 0 \;\; für \;\; k \ge 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T U(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \\
&= \frac{2A}{T^2} \cdot \left(t \cdot - \frac{\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{T}} \Bigg|_0^T + \frac{T}{2 \cdot k \cdot \pi} \cdot \int_0^T \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) dt \right) \\
&= \frac{2A}{T^2} \cdot \left(-T \cdot \frac{T}{2 \cdot k \cdot \pi} \cdot \cos(k \cdot 2\pi) + \frac{T}{2 \cdot k \cdot \pi} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}{\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{T}} \Bigg|_0^T \right) \\
&= -\frac{A}{k \cdot \pi}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \\
&= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot T \mid k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

In der Kippspannung sind folgende Komponenten vorhanden:

- Der Gleichspannungsanteil beträgt $\frac{A}{2}$
- Die Grundschwingung hat die Kreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

  und die Amplitude $\frac{A}{\pi}$
- Die Oberschwingungen haben die Kreisfrequenzen $\omega_1 = \frac{4\pi}{T},\ \omega_2 = \frac{6\pi}{T},\ \omega_3 = \frac{8\pi}{T}, \ldots$

  und die Amplituden $A_1 = \frac{A}{2\pi},\ A_2 = \frac{A}{3\pi},\ A_3 = \frac{A}{4\pi}, \ldots$

Amplitudenspektrum:

2.5 Kurze Wiederholung: Komplexe Zahlen

$z = x + iy$ (x ist der Realteil von z ($\Re(z)$) und y der Imaginärteil von z ($\Im(z)$))

Betrag einer komplexen Zahl: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Konjugiert komplexe Zahl: $\bar{z} = x - iy$

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$$

$$\boxed{\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}}$$

$$z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy$$

$$\boxed{\Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}}$$

Polarkoordinatendarstellung von $z = x + iy$

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r} \quad \rightarrow \quad x = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{y}{r} \quad \rightarrow \quad y = r \cdot \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \quad ; 0 \le \varphi < 2\pi$$

Eulersche Formel:

$$\boxed{e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)} \Rightarrow \boxed{z = r \cdot e^{i\varphi}}$$

$$\Re\left(e^{i\varphi}\right) = \cos(\varphi) \qquad\qquad \Im\left(e^{i\varphi}\right) = \sin(\varphi)$$

$$\overline{e^{i\varphi}} = \cos(\varphi) - i\sin(\varphi) = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = e^{-i\varphi}$$

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad\qquad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2}}$$

$$\begin{aligned} e^{i\cdot(\varphi+\psi)} &= \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi) \\ &= \cos(\varphi)\cdot\cos(\psi) - \sin(\varphi)\cdot\sin(\psi) + i\left(\sin(\varphi)\cdot\cos(\psi) + \sin(\psi)\cdot\cos(\varphi)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi} &= \left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)\cdot\left(\cos(\psi) + i\sin(\psi)\right) \\ &= \cos(\varphi)\cdot\cos(\psi) + i\sin(\varphi)\cdot\cos(\psi) + \cos(\varphi)\cdot i\sin(\psi) - \sin(\varphi)\cdot\sin(\psi) \end{aligned}$$

$$e^{i\cdot(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi}$$

2.6 Komplexe Darstellung von Fourier-Reihen

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion und

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\cos(kx) + b_k\cdot\sin(kx)\right)$$

die Fourier-Reihe von f.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cdot\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} + b_k\cdot\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\right) \qquad \left(erweitern\ des\ 2.Summanden\ mit\ i\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k\cdot e^{ikx} + a_k\cdot e^{-ikx} - ib_k\cdot e^{ikx} ib_k\cdot e^{-ikx}}{2}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}\cdot e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2}\cdot e^{-ikx}\right) \end{aligned}$$

$$c_0 := \frac{a_0}{2}$$

$$c_k := \frac{a_k - ib_k}{2} \qquad \textit{für } k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$c_{-k} := \frac{a_k + ib_k}{2} \qquad \textit{für } k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx} + c_{-k} \cdot e^{-ikx} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx}}$$

mit

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx)\, dx - i \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx)\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \big(\cos(kx) - i \sin(kx)\big)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx \qquad \textit{für } k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{ikx} dx \qquad \textit{für } k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-i(-k)x} dx$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx} \qquad \textit{für alle } k \in \mathbb{Z}$$