Die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe einer 2π -periodischen Funktion f lautet:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ikx} \qquad mit \qquad c_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-ikx} dx$$

Für eine Funktion f mit der Periode T > 0 gilt

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\frac{2\pi k}{T}x} \qquad mit \qquad c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot e^{-i\frac{2\pi k}{T}x} dx$$

Beispiel:

$$f(t) = 2 - |t| \quad für \quad t \in [-1,1[\ \ mit \ der \ Periode \ T = 2 \ \ fortgesetzt$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} (2 - |t|)\, dt = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_{0}^{1} (2-t)\, dt = \int_{0}^{1} (2-t)\, dt = 2t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} 2 - |t| \cdot e^{-ik\pi t} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{-1}^{0} (2+t) \cdot e^{-ik\pi t} dt + \int_{0}^{1} (2-t) \cdot e^{-ik\pi t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \int_{-1}^{0} e^{-ik\pi t} dt + \int_{-1}^{0} t \cdot e^{-ik\pi t} dt + 2 \cdot \int_{0}^{1} e^{-ik\pi t} dt - \int_{0}^{1} t \cdot e^{-ik\pi t} dt \right) \end{aligned}$$

Einzelberechnung der Integrale:

(1)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} e^{-ik\pi t} &= \frac{e^{-ik\pi t}}{-ik\pi}\Big|_{-1}^{0} = \frac{i \cdot e^{-ik\pi t}}{-i^2 k\pi}\Big|_{-1}^{0} = \frac{i \cdot e^{-ik\pi t}}{-(-1)k\pi}\Big|_{-1}^{0} = \frac{i}{k\pi} \cdot e^{-ik\pi t}\Big|_{-1}^{0} = \frac{i}{k\pi} \cdot \left(e^{0} - e^{ik\pi}\right) \\ &= \frac{i}{k\pi} \cdot \left(1 - \left(\cos(k\pi) + i\sin(k\pi)\right)\right) = \frac{i}{k\pi} \cdot \left(1 - (-1)^k\right) \end{aligned}$$

(2)

$$\int_{-1}^{0} e^{-ik\pi t} = \frac{i}{k\pi} \cdot e^{-ik\pi t}\Big|_{0}^{1} = \frac{i}{k\pi} \cdot \left(e^{-ik\pi} - e^{0}\right) = \frac{i}{k\pi} \cdot \left(\left(\cos(k\pi) - i\sin(k\pi)\right) - 1\right) = \frac{i}{k\pi} \cdot \left((-1)^k - 1\right)$$

(Rechenschritte können von der vorherigen Berechnung z.T. übernommen werden)

(3)

$$\int_{-1}^{0} t\cdot e^{-ik\pi t}dt = t\cdot\frac{e^{-ik\pi t}}{-ik\pi}\bigg|_{-1}^{0} - \frac{i}{k\pi}\cdot\int_{-1}^{0} e^{-ik\pi t}dt$$
$$=\frac{i}{k\pi}\cdot e^{ik\pi} - \frac{i}{k\pi}\cdot\frac{i}{k\pi}\cdot\left(1-(-1)^k\right)$$
$$=\frac{i}{k\pi}\cdot(-1)^k + \frac{1}{k^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^k\right)$$

(4)

$$\int_{0}^{1} t\cdot e^{-ik\pi t}dt = t\cdot\frac{e^{-ik\pi t}}{-ik\pi}\bigg|_{0}^{1} - \frac{i}{k\pi}\cdot\int_{0}^{1} e^{-ik\pi t}dt$$
$$=\frac{i}{k\pi}\cdot(-1)^k - \frac{i}{k\pi}\cdot\frac{i}{k\pi}\cdot\left((-1)^k-1\right)$$
$$=\frac{i}{k\pi}\cdot(-1)^k + \frac{1}{k^2\pi^2}\cdot\left((-1)^k-1\right)$$

$$c_k = \frac{i}{k\pi}\cdot\left(1-(-1)^k\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2\pi^2}\cdot\left(1-(-1)^k\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{k\pi}\cdot(-1)^k+\frac{i}{k\pi}\cdot\left((-1)^k-1\right)$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{i}{k\pi}\cdot(-1)^k-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k^2\pi^2}\cdot\left((-1)^k-1\right)$$

$$c_k = \frac{1}{k^2\pi^2}-\frac{(-1)^k}{k^2\pi^2}=\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}$$

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\cdot e^{ik\pi t} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\cdot e^{ik\pi t}+\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\cdot e^{ik\pi t}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^{-k}}{(-k)^2\pi^2}\cdot e^{i(-k)\pi t}+\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\cdot e^{ik\pi t}$$
$$=\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\cdot\left(e^{-ik\pi t}+e^{ik\pi t}\right)\right)$$
$$=\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}\cdot 2\cdot\cos(k\pi t)\right)$$
$$f(t)=\frac{3}{2}+\frac{4}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left((2k-1)\pi t\right)}{(2k-1)^2}$$

2.7 Fourier Transformation

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit der Periode T > 0, welche die Voraussetzungen des Konvergenzkriteriums erfüllt:

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\cdot e^{i\frac{2\pi k}{T}x}\qquad mit\qquad c_k=\frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cdot e^{-i\frac{2\pi k}{T}x}dx$$

$$\omega:=\frac{2\pi}{T}$$

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\cdot e^{ik\omega x}\qquad mit\qquad c_k=\frac{\omega}{2\pi}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cdot e^{-ik\omega x}dx$$

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{2\pi}\cdot\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cdot e^{-ik\omega t}dt\right)\cdot e^{ik\omega x}$$

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{2\pi}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cdot e^{-ik\omega(t-x)}dt$$

Durch Grenzübergang $T\to\infty$ bzw. $\omega\to 0$ erhalten wir aus f eine nicht periodische Funktion.

$$\omega_k=k\cdot\omega$$
$$\Delta\omega_k=\omega_{k+1}-\omega_k=(k+1)\omega-k\omega=\omega$$

Für eine nicht periodische Funktion f gilt:

$$f(x)=\lim_{\Delta\omega\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega_k(t-x)}dt\right)\cdot\Delta\omega_k$$

$$g(\omega):=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega_k(t-x)}dt$$

$$f(x)=\lim_{\Delta\omega_k\to 0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(\omega_k)\cdot\Delta\omega_k$$

f(x) ist der Grenzwert der Riemann'schen Summe (→ s. Kap. 1.2) zur Zerlegung $k\cdot\omega(k\in\mathbb{Z})$ und der Wahl der Zwischenpunkte $\omega_k=k\cdot\omega$.

Definition:

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine nicht periodische Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt<\infty$$

Dann heißt die Funktion $\hat{f}$ mit

$$\boxed{\hat{f}(\omega):=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt}$$

die Fourier-Transformierte von f.

$$\boxed{f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\cdot e^{i\omega x}d\omega}$$

periodischer Fall	$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\cdot e^{ikx}$	$c_k=\frac{1}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cdot e^{-i\omega_k t}dt$
nicht periodischer Fall	$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\cdot e^{i\omega x}d\omega$	$\hat{f}(\omega):=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$