Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt<\infty$. Dann heißt

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$$

die Fourier-Transformation von f.
An Stellen t, an denen die Funktion f stetig ist, gilt

$$f(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega \qquad \text{(Inverse-Transformation)}$$

Bespiel: Rechtecksimpuls

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$f(t)=\begin{cases}1, \; falls\; |t|<1\\ 0, sonst\end{cases}$$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-1}^{1}1\cdot e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\cdot\left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_{-1}^{1}=\frac{i}{2\pi\omega}\cdot\left(e^{-i\omega}-e^{i\omega}\right)$$

$$=\frac{i}{2\pi\omega}\cdot\left(-2\cdot\Im\left(e^{i\omega}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

$$\hat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int\limits_{-1}^{1}1\cdot e^{-i\omega 0}dt=\frac{1}{2\pi}\cdot t\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{\pi}$$

Für $\omega=0$ muss $\hat{f}(\omega)$ separat berechnet werden

$$\hat{f}(\omega)=\begin{cases}\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}, \; falls\; \omega\neq 0\\ \frac{1}{\pi}, \; falls\; \omega=0\end{cases}$$

Das Spektrum einer Funktion:

Im periodischen Fall:

$$a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t) = A_k \cdot \sin(k\omega t + \varphi)$$
$$A_k = \sqrt{a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}}$$
$$A_k \cdot \sin(k\omega t + \varphi) = A_k \left(\sin(k\omega t) \cdot \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot \cos(k\omega t)\right)$$
$$a_k = A_k \cdot \sin(\varphi) \quad und \quad b_k = A_k \cdot \cos(\varphi)$$
$$a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2} = A_k^{\ 2} \cdot \sin^2(\varphi) + A_k^{\ 2} \cdot \cos^2(\varphi) = A_k^{\ 2}\left(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right) = A_k^{\ 2}$$
$$A_k = \sqrt{a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}}$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \qquad für \ \ k = 1, 2, 3, \dots$$
$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$
$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \qquad für \ \ k = 1, 2, 3, \dots$$
$$|c_k|^2 = \left(\frac{a_k}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b_k}{2}\right)^2 = \frac{a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}}{4}$$
$$|c_{-k}|^2 = \left(\frac{a_k}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_k}{2}\right)^2 = \frac{a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{A_k}{4}$$
$$|c_k| = \frac{A_k}{2} \quad für \ \ alle \ \ k \in \mathbb{Z}$$

Diskretes Spektrum einer periodischen Funktion:

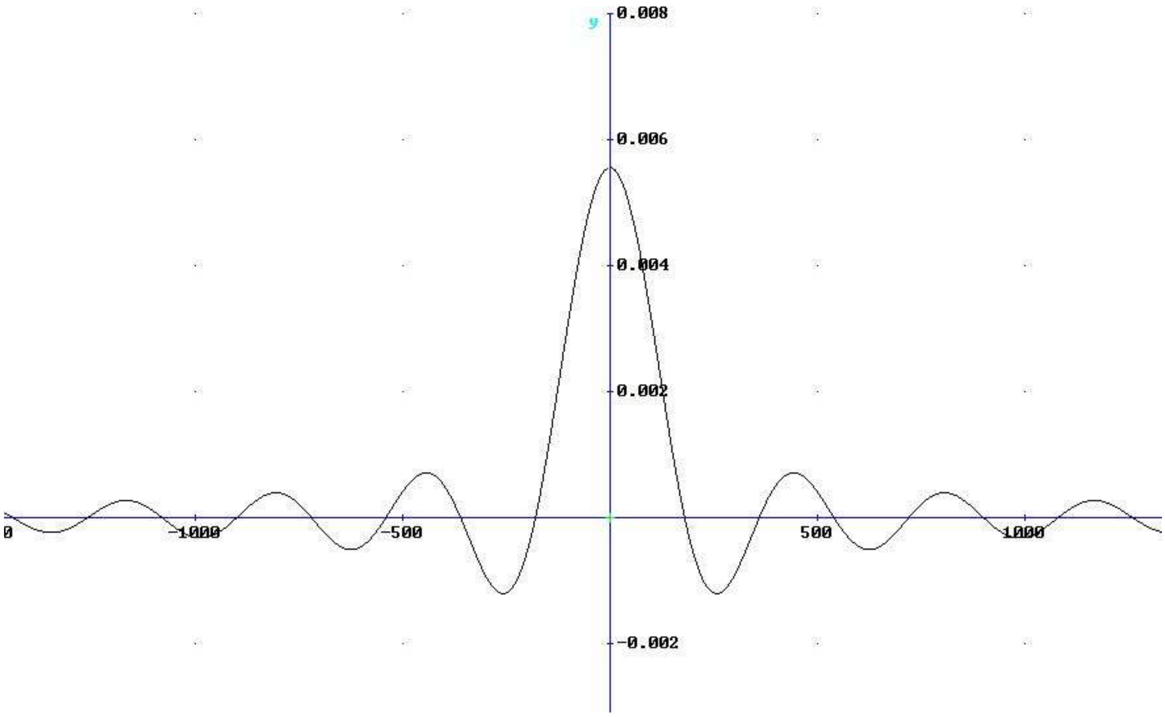
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(t) = 2 - |t| \quad für \quad |t| \le 1 \ und \ mit \ der \ Periode \ 2 \ fortgesetzt$$

$$c_k = \frac{1 - (-1)^k}{k^2 \pi^2} \qquad für \ \ k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$
$$c_0 = \frac{3}{2}$$

Kontinuierliches Spektrum einer nicht-periodischen Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$f(t)=\begin{cases}1, \; falls\ |t|<1\\ 0, sonst\end{cases} \qquad \hat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$$



Korrespondenz der Fourier Transformation

$f(t)\leftrightarrow\hat{f}(\omega)$ (korrektes Symbol ist im Formeleditor nicht integriert)

f korrespondiert mit $\hat{f}$.

Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=?$$

$$f(t)=\begin{cases}1, \; falls\ |t|\le 1\\ 0\ sonst\end{cases} \quad\leftrightarrow\quad \hat{f}(\omega)=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega)}{\omega}d\omega=\pi\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}d\omega=\pi\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)d\omega$$

$$=\pi\cdot\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}d\omega=\pi\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\cdot e^{i\omega 0}d\omega=\pi\cdot f(0)=\pi$$