1. Riemann'sche Summen

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(x)\geq 0$ für alle $x\in[a,b]$. Dann lässt sich der Flächeninhalt annähern durch Rechtecke, die in beliebige Intervalle zwischen a und b gezeichnet werden annähern. Diese Rechtecke haben als Höhe immer den Wert eines beliebigen Funktionswertes $f(z_i)$ des zuvor eingeteilten Intervalls. Die Breite der Rechtecke lässt sich durch abziehen der x-Werte berechnen (x_n-x_{n-1}). Daraus ergibt sich folgende Formel für die Annäherung des Flächeninhalts:

(1) für eine beliebige Funktion mit 4 Intervallen:

$$A\approx(x_1-x_0)\cdot f(z_1)+(x_2-x_1)\cdot f(z_2)+(x_3-x_2)\cdot f(z_3)+(x_4-x_3)\cdot f(z_4)$$
$$A\approx\sum_{i=1}^{4} f(z_i)\cdot\Delta x_i$$

allgemein: $A\approx\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\cdot\Delta x_i$

Definition:

$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\cdot\Delta x_i$ heißt Riemann'sche Summe von f zur Zerlegung $\{x_0,x_1,...,x_n\}$ des Intervalls $[a,b]$ und der Wahl der Zwischenpunkte $z_1,...,z_n$ und $z_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Beispiel:

Riemann'sche Summe $f(x)=\sqrt{x}$ zur Zerlegung $\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,\frac{3}{2},2\right\}$ und Wahl der Zwischenpunkte $z_1=\frac{1}{4};z_2=\frac{9}{25};z_3=\frac{16}{25};z_4=\frac{81}{100};z_5=1;z_6=1,69$.

$$\sum_{i=1}^{6}\sqrt{z_i}\cdot\Delta x_i=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}+1,3\cdot\frac{1}{2}=1,85$$

(zum Vergleich: der exakte Wert liegt bei 1,8856…)

1.3 Das bestimmte Integral

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(1) Zerlege das Intervall $[a,b]$ in n Teilintervalle mit Hilfe der Unterteilungspunkte

$x_0=a, x_1, ..., x_{n-1}, x_n=b$.

(2) Wähle in jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]\,(i=1,...,n)$ einen Zwischenpunkt z_i.

(3) Mit den gewählten Größen $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ und z_i bilde die Riemann'sche Summe

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\cdot\Delta x_i \ .$$

(4) Verkleinerung der Teilintervalle $\Delta x_i \to 0$ und damit $n\to\infty$

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Dieser Grenzwert heißt das bestimmte Integral von f in den Grenzen von a bis b.

Bemerkungen:

(1) $\int_a^b f(x)\,dx$ ist eine reelle Zahl.

(2) Freie Wahl der Integrationsvariablen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$

(3) Anschauliche Bedeutung von $\int$ und dx

$\Delta x_i \to 0$ (differentielle Größe $\Delta x_i \approx dx$)

$\sum \ \to \int$ (Integral als „unendliche Summe")

(4) Falls $f(x)\geq 0$ für alle, dann entspricht der Wert des bestimmten Integrals dem Flächeninhalt, der vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[a,b]$ eingeschlossen wird.

Definition (Erweiterung des Integralbegriffs)

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und sei F(x) eine Stammfunktion von f(x). Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Beispiele:

(1)

$$\int_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx + 3\cdot\int_1^4 x^{-2} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3\cdot -\frac{1}{x}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}-\frac{3}{x}\Big|_1^4$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3}-\frac{3}{1}\right) = \left(\frac{2}{3}\cdot 8-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-3\right) = \frac{16}{3}-\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+3 = \frac{83}{12}$$

(2) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

Beweis des Hauptsatzes

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n f(z_i)\cdot\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n F'(z_i)\cdot\Delta x_i$$

$$\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = F'(z_i)$$

$$F'(z_i)\cdot\Delta x_i = F(x_i)-F(x_{i-1})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^n \left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right)$$

$$= \lim_{\Delta x_i\to 0}\left(F(x_n)-F(x_0)\right) = F(b)-F(a)$$

Integrationsregeln für bestimmte Integrale

(1) partielle Integration: $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$

(2) Substitutionsregel: $\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$

Beispiele:

(1)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cdot\sin(x)\,dx = -\cos(x)\cdot\sin(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos(x)\right)\cdot\cos(x)\,dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1-\sin^2(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx$$

$$2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(2)

$$\int_2^6 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \int_1^3 \frac{x}{y}\cdot y\,dy = \int_1^3 x\,dy = \int_1^3 \left(\frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}\right)dy$$

$$SUB: y=\sqrt{2x-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2x-3}}\cdot 2 = \frac{1}{y} \Rightarrow dx = y\,dy$$

$$y^2 = 2x-3 \Rightarrow 2x = y^2+3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y^2+\frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{3}{2}y\Big|_1^3 = \frac{1}{6}\cdot 27+\frac{9}{2}-\frac{1}{6}-\frac{3}{2} = \frac{26}{6}+3 = \frac{19}{2}$$

1.4 Anwendungen der Integralrechnung

Die allgemeine Flächeninhaltsdefinition

(1) Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse

$$\int_a^b \left|f(x)\right|dx$$

(2) Flächeninhalt zwischen den Graphen von zwei Funktionen

$$\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx$$

Beispiel:

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2} \qquad g(x)=f(x)^2=\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}\right)^2$$

Gesuchter Flächeninhalt:

$$\int_{-4}^{4}\left|f(x)-g(x)\right|dx$$

Schnittpunkte berechnen:

$$f(x)=g(x)=f(x)^2$$

$$1.Fall \quad f(x)\neq 0 \Rightarrow 1=f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$$

$$2.Fall \quad f(x)=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}=0\Rightarrow x^2=6\Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$$

Berechnung des Flächeninhalts über Intervallintegrale:

$$A=\int_{-4}^{-\sqrt{6}}\left(g(x)-f(x)\right)dx+\int_{-\sqrt{6}}^{-\sqrt{2}}\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$+\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(g(x)-f(x)\right)dx+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{\sqrt{6}}^{4}\left(g(x)-f(x)\right)dx$$

Berechnung des gesuchten Fläscheninhalts:

$$\int_{-4}^{4}\left|\left(f(x)-g(x)\right)\right|dx=2\cdot\int_{0}^{4}\left|\left(f(x)-g(x)\right)\right|dx$$

$$=2\cdot\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}\right)dx+2\cdot\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}-1\right)dx$$

$$2\cdot\int_{\sqrt{6}}^{4}\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=2\cdot\int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{1}{10}x^4-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}dx+2\cdot\left(\frac{1}{80}x^5-\frac{1}{12}x^3-\frac{3}{4}x\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}$$

$$+2\cdot\left(\frac{1}{80}4^5-\frac{1}{12}4^3-\frac{3}{4}4\right)-\left(\frac{1}{80}\sqrt{6}^5-\frac{1}{12}\sqrt{6}^3-\frac{3}{4}\sqrt{6}\right)$$

$$\approx 10{,}95$$