1.5 Uneigentliche Integrale

Beispiel: Schuss in den Weltraum

$$m = 1kg$$
$$M = 5{,}877 \cdot 10^{24}\, kg \ \ (Masse\ der\ Erde)$$
$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, \frac{Nm^2}{kg^2} \ (Gravitationskonstante)$$
$$r_0 = 6{,}37 \cdot 10^6\, m\ (Erdradius)$$

$$F(r) = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Arbeit W, die aufgebracht werden muss, um die Masse M auf die Höhe h zu heben:

$$W = \int_{r_0}^{h} F(r)\,dr = \int_{r_0}^{h} -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}\,dr = -\gamma \cdot m \cdot M \cdot \int_{r_0}^{h} \frac{1}{r^2}\,dr = -\gamma \cdot m \cdot M \cdot -\frac{1}{r}\bigg|_{r_0}^{h}$$
$$W = \gamma \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{r_0}\right)$$
$$W = \lim_{h \to \infty} \gamma \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{r_0}\right) = -\gamma \cdot m \cdot M \cdot \frac{1}{r_0} = -\frac{\gamma \cdot m \cdot M}{r_0}$$

Die Arbeit W_0, die notwendig ist, um die Masse m = 1kg ganz aus dem Gravitationsfeld der Erde zu entfernen, beträgt

$$W_0 = 6{,}26 \cdot 10^7\, Nm$$
$$W_0 = \int_{r_0}^{\infty} F(r)\,dr = \lim_{h \to \infty} \int_{r_0}^{h} F(r)\,dr$$

Definition:
Sei f: $[a, \infty[\ \to \mathbb{R}$ auf jedem kompakten Intervall $[a, b]$ mit $b \in \mathbb{R}, b \geq a$ integrierbar und existiert , dann heißt

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

das uneigentliche Integral von f über $[a, \infty[$.
Ganz entsprechend gilt:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Satz:
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,b]$ integrierbar und es gibt ein $c\in\mathbb{R}$, sodass beide uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad und \quad \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

existieren, dann existieren beide Integrale für jedes $c\in\mathbb{R}$.

Definition:
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion und , sodass und existieren, so heißt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$$

uneigentliches Integral von f über $\mathbb{R}$.

Beispiele:

(1)

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right|_{1}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -2\cdot\left.\frac{1}{\sqrt{x}}\right|_{1}^{b} = (-2)\cdot\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-1\right) = (-2)\cdot(-1) = 2$$

(2)

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \ln(x)\Big|_{2}^{b} = \lim_{b\to\infty}\big(\ln(b)-\ln(2)\big) = \infty$$

➔ Das Integral existiert nicht

(3)

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-2} \frac{1}{x^2+x}\,dx$$

$Ansatz:$

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 1 = A\cdot(x+1) + Bx$$

$$x=-1: \qquad 1 = B\cdot(-1) \Rightarrow B=-1$$

$$x=0: \qquad 1 = A$$

$$\int_{a}^{-2} \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int_{a}^{-2} \frac{1}{x}\,dx - \int_{a}^{-2} \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(|x|)\Big|_a^{-2} - \ln(|x+1|)\Big|_a^{-2}$$

$$= \left(\ln(2) - \ln(|a|)\right) - \left(\ln(1) - \ln(|a+1|)\right)$$

$$= \ln(2) - \ln(|a|) + \ln(|a+1|)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(\left|\frac{a+1}{a}\right|\right)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(\left|1+\frac{1}{a}\right|\right)$$

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2+x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \ln(2) + \ln\left(\left|1+\frac{1}{a}\right|\right) = \ln(2)$$

(4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\cdot \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \ (\to Achsensymmetrie)$$

$$= 2\cdot \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\cdot \lim_{b\to\infty} \arctan(x)\Big|_0^b = 2\cdot \lim_{b\to\infty} \arctan(b) - \arctan(0)$$

$$= 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$