Tutorium Mathe 1 MT

II. Komplexe Zahlen:

Komplexe Zahlen erweitern die Menge der reellen Zahlen. Entscheidend dafür ist die Zahl i, auch „imaginäre Einheit“ genannt, die definiert ist als $i := \sqrt{-1}$. Mit Hilfe der komplexen Zahlen lassen sich bestimmte Rechenoperationen durchführen, die im reellen Bereich nicht möglich wären. Ein Beispiel hierfür sind „komplexe Nullstellen“.

1. Schreibweisen einer Komplexen Zahl

   1) Trennung von Real- und Imaginärteil

   $$z = a + ib$$

   2) Trigonometrische Form

   $$z = |z| \cdot \left(\cos\left(\arg(z)\right) + i\sin\left(\arg(z)\right)\right)$$

   3) Eulersche Formel

   $$z = e^{i\cdot(\arg(z))}$$

2. Betrag und Argument einer komplexen Zahl

   Der Betrag einer komplexen Zahl z = x + iy wird als Länge eines Vektors berechnet, der in der Zahlenebene (komplexes Koordinatensystem mit x-Achse: Realteil, y-Achse: Imaginärteil) auf den entsprechenden Wert zeigt:

   $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

   Das Argument (der Winkel zwischen dem Betragsvektor und der positiven-Realachse) wird über den Arcus-Tangens definiert. Dieser muss, auf Grund der Definitionslücken, an einigen Stellen separat definiert werden, damit für die volle Umdrehung von 360° Werte berechnet werden können. Um diesen Vorgang zu verstehen, ist es oft hilfreich, sich mit Polarkoordinaten zu beschäftigen, die eine Veranschaulichung möglich machen.

   Polarkoordinaten:
   Diese werden benutzt, um einen Zeiger, der um einen Punkt (Pol) rotiert, in jeder Position anzeigen zu können. Prinzipiell lässt sich dieses durch Betrag und Argument der Zahl erreichen. Durch die Umformung von kartesischen in Polarkoordinaten entspricht eine volle Kreisumdrehung von 360° dem Wert seiner Bogenlänge 2π. Am Taschenrechner stellt man in diesem Fall auf das Winkelmaß Radiant (RAD) um.

   Aus dieser Umrechnung kann man nun Rückschlüsse auf die Berechnung des Arguments machen. Stellt man sich einen Zeiger vor, der in einem Winkel auf einen Wert zeigt, so lässt sich dieser Winkelwert auch über den Arcus-Tangens aus x- und y-Koordinate ermitteln. Genau nach diesem Schema verfährt man beim Argument einer Komplexen Zahl.

Es ist definiert mit:

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \ falls\ b \geq 0, a > 0 \\ \frac{\pi}{2}, \ falls\ b > 0, a = 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right), falls\ a < 0 \\ \frac{3\pi}{2}, \ falls\ b < 0, a = 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{b}{a}\right), falls\ a > 0, b < 0 \end{cases}$$

3. Rechnen mit komplexen Zahlen

3.1 Addition und Subtraktion:

In diesem Fall wird die jeweilige Rechenoperation im Real- und Imaginärteil durchgeführt.

Beispiele:

(1) $(2+i4)+(4+i6)=6+i10$

(2) $(2+i4)-(5+i2)=-3+i2$

3.2 Multiplikation

Die Multiplikation wird genau wie beim Ausklammern umgesetzt. Einzige wichtige Änderung ist die Berechnung eines Produkts aus zwei Imaginärteilen, denn hier muss beachtet werden, dass $i^2 = -1$ ist.

Beispiel:

(1) $(3+i4)\cdot(5+i2)=15+i20+i6-8=7+i26$

3.3 Division

Hier behilft man sich über das konjugiert komplexe (Vorzeichen zwischen Real- und Imaginärteil umdrehen), mit dem der Bruch erweitert wird. Damit bekommt man im Nenner einen reellen Ausdruck. Hier ist wieder wichtig zu beachten, dass $i^2 = -1$ ist. Dadurch kehrt sich das Vorzeichen bei der Ausgerechneten binomischen Formel um.

Beispiel:

(1) $\frac{1}{(3+i4)} = \frac{(3-i4)}{(3+i4)\cdot(3-i4)} = \frac{(3-i4)}{9+16} = \frac{(3-i4)}{25} = \frac{3}{25} + i\frac{4}{25}$