Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Differentialrechnung (+Lösungen)

1) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Tangentialebenen an den Graphen der Funktion

$$f(x,y) = 4x^2 + 8y^2 + xy$$

in den Punkten $P_1(0,1,8)$ bzw. $P_2\left(0,-\frac{1}{2},2\right)$ und der x-z-Ebene.

Lösung:
Berechnung der partiellen Ableitungen von $f(x,y)$:

$$f_x(x,y) = 8x + y$$
$$f_y(x,y) = 16y + x$$

Tangentialebenen:

$$P_1 \to z = x + 16\cdot(y-1) + 8 = x + 16 - 8$$
$$P_2 \to z = -\frac{1}{2}x + (-8)\cdot\left(y + \frac{1}{2}\right) + 2 = -\frac{x}{2} - 8y - 2$$

Für die x-z-Ebene gilt $y = 0$. Berechnung des Schnittpunktes per LGS.

$$\begin{matrix} z - x = -8 \\ \frac{x}{2} + z = -2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -x + z = -8 \\ x + 2z = -4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4 + 2z + z = -8 \\ x = -4 - 2z \end{matrix} \Leftrightarrow 3z = -12$$

$$\begin{matrix} z = -4 \\ x = -4 + 8 = 4 \end{matrix}$$

Koordinaten des Schnittpunktes:
$S(4,0,-4)$

2) In welchen Punkten ist die Tangentialebene an den Graphen der Funktion

$$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$$

parallel zur Ebene $2x + 2y + z = 0$? Stellen Sie für jeden der ermittelten Punkte die Gleichung der Tangentialebene auf.

Bestimmen der Tangentialebene von $f(x,y)$:

$$f_x(x,y) = -2x$$
$$f_y(x,y) = -2y$$
$$\Rightarrow z = -2x \cdot (x - x_0) \cdot -2y \cdot (y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Bestimmung der Normalenvektoren der beiden Ebenen:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei zwei parallelen Ebenen sind die Normalenvektoren linear abhängig, es muss also gelten $\vec{n}_1 = \lambda \cdot \vec{n}_2$. Dies wird per LGS eingesetzt.

$$2x = \lambda \cdot 2$$
$$2y = \lambda \cdot 2$$
$$1 = \lambda$$
$$\Rightarrow x = 1, y = 1, z = 4 - 1^2 - 1^2 = 2$$
$$\Rightarrow P_1(1,1,2)$$

Tangentialebene für P_1:

$$z = -2 \cdot (x-1) - 2 \cdot (y-1) + f(1,1)$$
$$z = -2x + 2 - 2y + 2 + 2$$
$$2x + 2y + z = 6$$

3) Sei ε die Tangentialebene an den Graphen der Funktion

$$f(x,y)=x^3y^2$$

im Punkt $P(1,2,4)$. Berechnen Sie den Schnittpunkt von ε mit der z-Achse.

Berechnung der partiellen Ableitungen von $f(x,y)$:

$$f_x(x,y)=3x^2y^2$$
$$f_y(x,y)=2x^3y$$

Gleichung der Tangentialebene in Punkt P:

$$\begin{aligned} z &= 12\cdot(x-1)+4\cdot(y-2)+4 \\ &= 12x-12+4y-8+4 \\ z &= 12x+4y-16 \end{aligned}$$

Für die z-Achse gilt $x=y=0$. Durch einsetzen erhält man:

$$z=-16$$
$$\Rightarrow S(0,0,-16)$$

4) In welchen Punkten ist die Tangentialebene an den Graphen der Funktion

$$f(x,y)=\sqrt{36-x^2-4y^2}$$

Parallel zur Ebene $z=x+y$? Stellen Sie für jeden ermittelten Punkt die Gleichung der Tangentialebene auf.

Bestimmen der Tangentialebene von $f(x,y)$:

$$f_x=-\frac{x}{\sqrt{36-x^2-4y^2}}$$

$$f_y=-\frac{4y}{\sqrt{36-x^2-4y^2}}$$

$$\Rightarrow z=-\frac{x}{\sqrt{36-x^2-4y^2}}\cdot(x-x_0)\cdot-\frac{4y}{\sqrt{36-x^2-4y^2}}\cdot(y-y_0)+f(x_0,y_0)$$

Bestimmen der Normalenvektoren:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{36-x^2-4y^2}} \\ \frac{4y}{\sqrt{36-x^2-4y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bei zwei parallelen Ebenen sind die Normalenvektoren linear abhängig, es muss also gelten $\vec{n}_1 = \lambda \cdot \vec{n}_2$. Dies wird per LGS eingesetzt.

$$\left.\begin{array}{c} \frac{x}{\sqrt{36-x^2-4y^2}} = \lambda \\ \frac{4y}{\sqrt{36-x^2-4y^2}} = \lambda \\ 1 = -\lambda \end{array}\right\} \begin{array}{c} \frac{x}{\sqrt{36-x^2-4y^2}} = -1 \\ \frac{4y}{\sqrt{36-x^2-4y^2}} = -1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x^2 = 36-x^2-4y^2 \\ 16y^2 = 36-x^2-4y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2x^2 = 36-4y^2 \\ 20y^2 = 36-x^2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 2x^2 = 36-4\cdot\left(\frac{36-x^2}{20}\right) \\ y^2 = \frac{36-x^2}{20} \end{array} \Leftrightarrow \ 2x^2 = \frac{144+x^2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \ 10x^2 = 144+x^2 \ \Leftrightarrow \ 9x^2 = 144 \ \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 4$$

Aus der Gleichung für y^2 geht hervor, dass das Vorzeichen vor den Werten für $x_{1,2}$ durch das Quadrieren wegfällt. Aus den vorherigen Gleichungen kann man allerdings entnehmen, dass die Ergebnisse für x und y negativ sein müssen, weil auch die andere Seite der Gleichung negativ ist. Durch Einsetzen erhält man:

$$y^2 = \frac{36-16}{20} = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \rightarrow y = -1$$

Der Wert für z ergibt sich aus der Funktionsgleichung. Daraus erhält man:

$$z = \sqrt{36-16-4} = \sqrt{16} = 4$$
$$\rightarrow P_1(-4,-1,4)$$

Die Tangentialebene für den ermittelten Punkt P_1 kann nun ermittelt werden:

$$z = -\frac{-4}{4}\cdot(x+4)\cdot -\frac{-4}{4}\cdot(y+1)+1$$
$$z = x+4+y+4+1$$
$$z = x+y+9$$