Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Differentialrechnung Teil 2 (+Lösungen)

1) Bestimmen Sie drei positive Zahlen x, y, z, deren Summe gleich 12 und deren Produkt maximal ist.

Vorgabe: $x+y+z=12$

Zielfunktion: $f(x,y)=x\cdot y\cdot(12-x-y)=12xy-x^2y-xy^2 \to \max$.

$$f_x(x,y)=-y^2-2xy+12y$$
$$f_y(x,y)=-x^2-2xy+12x$$

Bestimmen von kritischen Stellen:

$$\begin{matrix} y^2+2xy-12y=0 \\ x^2+2xy-12x=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2xy=-y^2+12y \\ 2xy=-x^2+12x \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x=-y+12 \\ 2y=-x+12 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=\frac{-y}{2}+6 \\ \frac{4y}{2}=\frac{y}{2}+6 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3y}{2}=6 \Leftrightarrow y=4$$
$$\Rightarrow x=-2+6=4$$

Ein kritischer Punkt liegt bei $(4,4)$. Nun können die weiteren Berechnungen für mögliche Extremstellen durchgeführt werden.

$$f_{xx}(x,y)=-2y$$
$$f_{xy}(x,y)=-2y-2x+12$$
$$f_{yy}(x,y)=-2x$$

$$H\ f(x,y)=\begin{pmatrix} -2y & -2y-2x+12 \\ -2y-2x+12 & -2x \end{pmatrix}$$

$$\det(H\ f(x,y))=4xy-(-2y-2x+12)^2$$
$$\det(H\ f(4,4))=64-16=48>0 \to \mathit{Extremstelle}$$

$$f_{xx}(4,4)=-8<0 \to \mathit{Maximum}$$

Die drei gesuchten Zahlen sind $x=4$, $y=4$ und $z=4$.

2) Ermitteln Sie alle lokalen Maxima und Minima der reellen Funktion

$$f(x,y) = 3xy^2 + 4x^3 - 3y^2 - 12x^2 + 1.$$

$$f_x(x,y) = 3y^2 + 12x^2 - 24x$$
$$f_y(x,y) = 6xy - 6y$$

Aus den Ableitungen ergibt sich bereits die erste kritische Stelle bei $(0,0)$. Die restlichen müssen per LGS ermittelt werden.

$$\begin{matrix} 3y^2 + 12x^2 - 24x = 0 \\ 6xy - 6y = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3y^2 = -12x^2 + 24x \\ 6x - 6 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3y^2 = 12 \\ x = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y = \pm 2 \\ x = 1 \end{matrix}$$

Durch das Setzen von $y = 0$ erhält man außerdem:
$$12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-2) \Rightarrow x = 2$$

Es müssen also insgesamt vier kritische Stellen untersucht werden.

$$f_{xx}(x,y) = 24x - 24$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6y$$
$$f_{yy}(x,y) = 6x - 6$$

$$H\ f(x,y) = \begin{pmatrix} 24x - 24 & 6y \\ 6y & 6x - 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(H\ f(x,y)) = (24x - 24)\cdot(6x - 6) - 36y^2 = 144x^2 - 288x + 144 - 36y^2$$

$$\det(H\ f(1,2)) = 144 - 288 + 144 - 144 = -144 < 0 \to keine\ Extremstelle$$
$$\det(H\ f(1,-2)) = 144 - 288 + 144 - 144 = -144 < 0 \to keine\ Extremstelle$$
$$\det(H\ f(0,0)) = 144 > 0 \to Extremstelle$$
$$\det(H\ f(2,0)) = (48 - 24)\cdot(12 - 6) = 144 > 0 \to Extremstelle$$

$$f_{xx}(0,0) = -24 < 0 \to Maximum$$
$$f_{xx}(2,0) = 24 > 0 \to Minimum$$

Die Funktion hat bei $(0,0)$ ein lokales Maximum und bei $(2,0)$ ein lokales Minimum.

3) Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^2 + y \cdot e^y$$

und geben Sie jeweils an, um welche Art von Extremum (Maximum oder Minimum) es sich handelt.

$$f_x(x,y) = 2x$$
$$f_y(x,y) = e^y(1+y)$$

$$2x = 0 \to x = 0$$
$$1 + y = 0 \to y = -1$$

Man erhält eine kritische Stelle bei $(0,-1)$.

$$f_{xx}(x,y) = 2$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$$
$$f_{yy}(x,y) = e^y + (1+y)e^y = e^y(2+y)$$

$$H\ f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & e^y(2+y) \end{pmatrix}$$
$$\det(H\ f(x,y)) = 2e^y(2+y)$$

$$\det(H\ f(0,-1)) = 2e^{-1} > 0 \to \mathit{Extremstelle}$$
$$f_{xx}(0,-1) = 2 > 0 \to \mathit{Minimum}$$

Die Funktion hat bei $(0,-1)$ ein lokales Minimum.

4) Ermitteln Sie alle lokalen Maxima und Minima der reellen Funktion

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2 - 3x - 2y.$$

$$f_x(x,y) = 2x + 3y - 3$$
$$f_y(x,y) = 3x + 4y - 2$$

$$2x + 3y = 3$$
$$3x + 4y = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-1} = -6 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$f_{xx}(x,y) = 2$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 3$$
$$f_{yy}(x,y) = 4$$

$$H\ f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(H\ f(x,y)\right) = -1 \Rightarrow keine\,Extremstelle$$

In diesem Fall ist es egal, welchen kritischen Punkt man in die Determinante der Hessematrix einsetzt, diese bleibt immer negativ. Die Funktion besitzt daher keine Extremstellen.