Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Differentialgleichungen / Anfangswertprobleme (+ Lösungen)

1) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + 2xy - 5x = 0; \quad y(0) = 0.$$

Es liegt eine lineare DGL erster Ordnung vor, welche durch Variation der Konstanten gelöst werden kann.

$$y' = -2xy + 5y$$

Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$y' = -2x \cdot y$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -2\int x\, dx$$

$$\ln(|y|) = -x^2 + c$$

$$y_h(x) = e^{-x^2} \cdot C$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^{-x^2}$$

$$y_p'(x) = C'(x) \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot C(x) \cdot e^{-x^2}$$

$$C'(x) \cdot e^{-x^2} \cancel{-2x \cdot C(x) \cdot e^{-x^2}} \cancel{+2x \cdot \left(C(x) \cdot e^{-x^2}\right)} - 5x = 0$$

$$C'(x) = 5x \cdot e^{x^2}$$

$$C(x) = 5 \cdot \int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

$$5 \cdot \int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

$$SUB:$$

$$y = x^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$5 \cdot \int x \cdot e^{y} \frac{dy}{2x} = \frac{5}{2} \cdot \int e^{y} dy = \frac{5e^{y}}{2} = \frac{5e^{x^2}}{2}$$

$$y_p(x) = \frac{5}{2} \cancel{\cdot e^{x^2}} \cancel{\cdot e^{-x^2}} = \frac{5}{2}$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x^2} \cdot C + \frac{5}{2}$$

Einsetzen des AWP:

$$0 = C + \frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2} = C$$

Die Lösung des AWP lautet:

$$y(x) = \frac{5e^{-x^2}}{2} + \frac{5}{2}$$

2) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + y\sin(x) = 4x^3 e^{\cos(x)}; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Auch hier liegt eine lineare DGL 1. Ordnung vor, welche durch „Variation der Konstanten“ gelöst werden kann.

$$y' = -y\sin(x) + 4x^3 e^{\cos(x)}$$

Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$y' = -y\sin(x)$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = -\sin(x)$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\sin(x)\,dx$$

$$\ln(|y|) = \cos(x) + c$$

$$y_h(x) = e^{\cos(x)}\cdot C$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$y_p(x) = C(x)\cdot e^{\cos(x)}$$

$$y_p'(x) = C'(x)\cdot e^{\cos(x)} - \sin(x)\cdot C(x)\cdot e^{\cos(x)}$$

$$C'(x)\cdot e^{\cos(x)} \cancel{-\sin(x)\cdot C(x)\cdot e^{\cos(x)}} \cancel{+\left(C(x)\cdot e^{\cos(x)}\right)\sin(x)} - 4x^3 e^{\cos(x)} = 0$$

$$C'(x)\cancel{\cdot e^{\cos(x)}} = 4x^3 \cancel{e^{\cos(x)}}$$

$$C(x) = 4\int x^3\,dx$$

$$C(x) = x^4$$

$$y_p(x) = x^4 \cdot e^{\cos(x)}$$
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{\cos(x)} \cdot C + x^4 \cdot e^{\cos(x)} = e^{\cos(x)}\left(x^4 + C\right)$$

Einsetzen des AWP:

$$1 = e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + C\right)$$

$$1 = \frac{\pi^4}{16} + C$$

$$1 - \frac{\pi^4}{16} = C$$

Die Lösung des AWP lautet:

$$y(x) = e^{\cos(x)}\left(x^4 + 1 - \frac{\pi^4}{16}\right)$$

3) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - 2y + 5 = 0; \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1\,.$$

Es liegt eine lineare DGL 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten vor, welche durch einen speziellen Ansatz gelöst werden kann.

$$y'' - 2y = -5$$

Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\lambda^2 - 2 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$
$$y_h(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{2}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{2}x}$$

Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL durch speziellen Ansatz:

$$y_p(x) = A_0 \rightarrow \gamma + i\beta = 0 \rightarrow k = 0$$
$$y_p'(x) = 0$$
$$y_p''(x) = 0$$

$$-2A_0 = -5$$
$$A_0 = \frac{5}{2}$$
$$y_p(x) = \frac{5}{2}$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{2}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{2}x} + \frac{5}{2}$$

Einsetzen des AWP:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{2}x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{2}x} + \frac{5}{2}$$

$$y'(x) = \sqrt{2} \cdot C_1 \cdot e^{\sqrt{2}x} - \sqrt{2} \cdot C_2 \cdot e^{-\sqrt{2}x}$$

$$\begin{array}{r} 2 = C_1 + C_2 + \dfrac{5}{2} \\ -1 = \sqrt{2} \cdot C_1 - \sqrt{2} \cdot C_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} C_1 = -C_2 - \dfrac{1}{2} \\ -1 = -\sqrt{2} \cdot C_2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \cdot C_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} C_1 = -C_2 - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}-2}{2} = -2 \cdot \sqrt{2} \cdot C_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} C_1 = -C_2 - \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}-2}{4 \cdot \sqrt{2}} = C_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} C_1 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{4} - \dfrac{2}{4} \\ \dfrac{\sqrt{2}-1}{4} = C_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} C_1 = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{4} \\ \dfrac{\sqrt{2}-1}{4} = C_2 \end{array}$$

Die Lösung des AWP lautet:

$$y(x) = -\frac{1+\sqrt{2}}{4} \cdot e^{\sqrt{2}x} + \frac{\sqrt{2}-1}{4} \cdot e^{-\sqrt{2}x} + \frac{5}{2}$$

4) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{y}{x^2}dx - \left(\frac{1}{x} + \ln(y)\right)dy = 0; \quad y(1) = 1\,.$$

Bei dieser DGL müssen zunächst Umformungen vorgenommen werden, damit man erkennen kann, dass es sich um eine exakte DGL handelt.

$$\frac{y}{x^2}dx = \frac{1}{x} + \ln(y)\,dy$$

$$0 = \frac{1}{x} + \ln(y)\,y' - \frac{y}{x^2} \rightarrow Exakte\,DGL$$

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2} \qquad \rightarrow P_y(x,y) = -\frac{1}{x^2}$$

$$Q(x,y) = \frac{1}{x} + \ln(y) \rightarrow Q_x(x,y) = -\frac{1}{x^2}$$

Weil $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ existiert ein Potenzial.

$$F_x(x,y) = P(x,y) = -\frac{y}{x^2}$$

$$F_y(x,y) = Q(x,y) = \frac{1}{x} + \ln(y)$$

$$F(x,y) = \int -\frac{y}{x^2}\,dx = -y \cdot \int x^{-2}\,dx = \frac{y}{x} + C(y)$$

$$C(y) = F(x,y) - \frac{y}{x}$$

$$C'(y) = F_y(x,y) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \ln(y) - \frac{1}{x} = \ln(y)$$

$$C(y) = \int \ln(y)\,dy = \int 1 \cdot \ln(y)\,dy = y \cdot \ln(y) - \int 1\,dy = y \cdot \ln(y) - y$$

$$\frac{y}{x} + y \cdot \ln(y) - y = c$$

An dieser Stelle muss man das AWP einsetzen, damit man weiterrechnen kann. Da die Aufgabenstellung die allgemeine Lösung der DGL nicht verlangt, kann dies durchgeführt werden.

$$\frac{1}{1} + 1 \cdot \ln(1) - 1 = c \Rightarrow c = 0$$

$$\frac{y}{x} + y \cdot \ln(y) - y = 0$$

$$\frac{1}{x} + \ln(y) - 1 = 0$$

$$\ln(y) = -\frac{1}{x} + 1$$

$$y(x) = e^{1-\frac{1}{x}}$$

Die Lösung des AWP lautet:

$$y(x) = e^{1-\frac{1}{x}}$$