Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Differentialgleichungen 2.Ordnung (+ Lösungen)

1) Für die Differentialgleichung $x''-2x'+3x=\sin(4t)$ ermittle man eine partikuläre Lösung.

Der Störterm lässt sich durch einen speziellen Ansatz modellieren, daher wird dieser zur Lösung der DGL genutzt.

Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\lambda^2-2\lambda+3=0$$

$$\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{-2}=1\pm i2$$

Ansatz:

$$\beta=4,\ \gamma=0\Rightarrow\gamma+i\beta=i4\Rightarrow k=0$$

$$x=A_0\cdot\cos(4t)+B_0\cdot\sin(4t)$$

$$x'=-4A_0\cdot\sin(4t)+4B_0\cdot\cos(4t)$$

$$x''=-16A_0\cdot\cos(4t)-16B_0\cdot\sin(4t)$$

Einsetzen in die inhomogene DGL:

$$-16A_0\cdot\cos(4t)-16B_0\cdot\sin(4t)-2\left(-4A_0\cdot\sin(4t)+4B_0\cdot\cos(4t)\right)+\ldots$$

$$\ldots3\left(A_0\cdot\cos(4t)+B_0\cdot\sin(4t)\right)=\sin(4t)$$

$$-13A_0\cdot\cos(4t)-13B_0\cdot\sin(4t)+8A_0\cdot\sin(4t)-8B_0\cdot\cos(4t)=\sin(4t)$$

$$(-13A_0-8B_0)\cos(4t)+(8A_0-13B_0)\cdot\sin(4t)=\sin(4t)$$

Der verbleibende Term kann nun über ein LGS gelöst werden.

$$-13A_0-8B_0=0$$

$$8A_0-13B_0=1$$

$$A_0=\frac{\begin{vmatrix}0 & -8\\ 1 & -13\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-13 & -8\\ 8 & -13\end{vmatrix}}=\frac{8}{233}\qquad B_0=\frac{\begin{vmatrix}-13 & 0\\ 8 & 1\end{vmatrix}}{233}=-\frac{13}{233}$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL lautet:

$$x(t)=\frac{8}{233}\cos(4t)-\frac{13}{233}\sin(4t)$$

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''-2y'+y=\frac{e^x}{1+x^2}.$$

Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\lambda^2-2\lambda+1=0$$

$$\lambda_{1,2}=1+\sqrt{0}=1$$

$$y_h(x)=C_1\cdot x\cdot e^x+C_2\cdot e^x$$

Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten:

$$y_1(x)=xe^x$$

$$y_1'(x)=e^x+xe^x=e^x(1+x)$$

$$y_2(x)=e^x$$

$$y_2(x)=e^x$$

$$C_1(x)=-\int\frac{e^x\cdot\frac{e^x}{1+x^2}}{e^x(1+x)\cdot e^x-e^x\cdot xe^x}dx=-\int\frac{\cancel{e^{2x}}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\cancel{e^{2x}}(1+x)-\cancel{e^{2x}}\cdot x}dx=-\int\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}dx$$

$$=-\int\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=-\arctan(x)$$

$$C_2(x)=\int\frac{xe^x\cdot\frac{e^x}{1+x^2}}{e^x(1+x)\cdot e^x-e^x\cdot xe^x}dx=\int\frac{x\cancel{e^{2x}}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\cancel{e^{2x}}(1+x)-\cancel{e^{2x}}\cdot x}dx=\int\frac{x\cdot\frac{1}{1+x^2}}{1}dx$$

$$=\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$SUB:$

$$y=1+x^2\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=2x\Leftrightarrow dx=\frac{dy}{2x}$$

$$\Rightarrow\int\frac{x}{1+x^2}dx=\int\frac{x}{y}\frac{dy}{2x}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{y}dy=\frac{\ln(y)}{2}=\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2}$$

$$y_p(x)=-\arctan(x)\cdot xe^x+\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2}\cdot e^x$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet:

$$y(x) = C_1 \cdot x \cdot e^x + C_2 \cdot e^x - \arctan(x) \cdot xe^x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} \cdot e^x$$

$$= e^x \left(C_1 x + C_2 - \arctan(x) \cdot x + \frac{\ln(1+x^2)}{2} \right)$$

3) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - 2y' - 3y = \sqrt{e^x}$.
Bestimmen Sie ferner die Lösung, die $y(0) = y'(0) = 0$ erfüllt.

Der Störterm kann auch als $e^{\frac{1}{2}x}$ geschrieben werden, damit kann der spezielle Ansatz zur Lösung der inhomogenen DGL genutzt werden.

Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$$

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}$$

Ansatz:

$$\beta = 0,\ \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma + i\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow k = 0$$

$$y_p(x) = A_0 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_p'(x) = \frac{A_0}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_p''(x) = \frac{A_0}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

Einsetzen in die inhomogene DGL:

$$\frac{A_0}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2\left(\frac{A_0}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) - 3\left(A_0 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) = e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\frac{A_0}{4} \cancel{\cdot e^{\frac{1}{2}x}} - A_0 \cancel{\cdot e^{\frac{1}{2}x}} - 3A_0 \cancel{\cdot e^{\frac{1}{2}x}} = \cancel{e^{\frac{1}{2}x}}$$

$$\frac{A_0}{4} - \frac{16A_0}{4} = 1$$

$$-\frac{15}{4} A_0 = 1$$

$$A_0 = -\frac{4}{15}$$

$$y_p(x) = -\frac{4}{15} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

Lösen des AWP:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x} - \frac{4}{15} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y'(x) = -C_1 \cdot e^{-x} + 3C_2 \cdot e^{3x} - \frac{2}{15} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \frac{4}{15} \\ -C_1 + 3C_2 &= \frac{2}{15} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 15C_1 + 15C_2 &= 4 \\ -15C_1 + 45C_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 15 \\ 2 & 45 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 15 & 15 \\ -15 & 45 \end{vmatrix}} = \frac{180-30}{675+225} = \frac{150}{900} = \frac{1}{6}$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 4 \\ -15 & 2 \end{vmatrix}}{900} = \frac{30+60}{900} = \frac{90}{900} = \frac{1}{10}$$

Die Lösung des AWP lautet:

$$y(x) = \frac{1}{6} \cdot e^{-x} + \frac{1}{10} \cdot e^{3x} - \frac{4}{15} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

4) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 4y = \sin(2x)$

Der Störterm lässt sich auch in dieser DGL per speziellem Ansatz modellieren, sodass dieser zur Bestimmung der Lösung genutzt wird.

Bestimmung der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-4} = \pm i2$$

Ansatz:
$$\beta = 2,\ \gamma = 0 \Rightarrow \gamma + i\beta = i2 \Rightarrow k = 1$$

$$y_p(x) = A_0 x \cdot \cos(2x) + B_0 x \cdot \sin(2x)$$
$$y_p'(x) = A_0 \cdot \cos(2x) - 2A_0 x \cdot \sin(2x) + B_0 \cdot \sin(2x) + 2B_0 x \cdot \cos(2x)$$
$$= (B_0 - 2A_0 x) \cdot \sin(2x) + (A_0 + 2B_0 x) \cdot \cos(2x)$$
$$y_p''(x) = -2A_0 \cdot \sin(2x) + (2B_0 - 4A_0 x) \cdot \cos(2x)$$
$$+2B_0 \cdot \cos(2x) - (2A_0 + 4B_0 x) \cdot \sin(2x)$$
$$= (-4A_0 - 4B_0 x) \cdot \sin(2x) + (4B_0 - 4A_0 x) \cdot \cos(2x)$$

Einsetzen in die inhomogene DGL:
$$\left(-4A_0 \cancel{-4B_0 x}\right) \cdot \sin(2x) + \left(4B_0 \cancel{-4A_0 x}\right) \cdot \cos(2x) \ldots$$
$$\ldots + \cancel{4\left(A_0 x \cdot \cos(2x) + B_0 x \cdot \sin(2x)\right)} = \sin(2x)$$

$$-4A_0 \cdot \sin(2x) + 4B_0 \cdot \cos(2x) = \sin(2x)$$

Der verbleibende Term kann nun über ein LGS gelöst werden.
$$4B_0 = 0 \rightarrow B_0 = 0$$
$$-4A_0 = 1 \rightarrow A_0 = -\frac{1}{4}$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{4} x \cdot \cos(2x)$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet:
$$y(x) = \left(C_1 - \frac{1}{4}x\right) \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)$$