Tutorium Mathe 1 MT

Übungsblatt 1: **Lösungen**

1. Berechnen Sie $f'(x)$.

   a) $0,4x^3$ b) $8x^3$ c) $-\frac{10}{x^{11}}$ d) $\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ e) $-2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

   f) $-\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

2. Führen Sie eine Funktionsuntersuchung durch.

   a) Funktion und Ableitungen:

   $$f(x)=x^3-2x^2+4x$$
   $$f'(x)=3x^2-4x+4$$
   $$f''(x)=6x-4$$
   $$f'''(x)=6$$

   Definitionsbereich:

   $D=\mathbb{R}$

   Nullstellen:

   $f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$

   Extremstellen:

   $f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad \{\ \}$

   Wendestellen:

   $f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{2}{3}$

   $f'''\left(\frac{2}{3}\right)>0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Wendestelle bei } x=\frac{2}{3}$

   Verhalten im Unendlichen:

   $x\to-\infty \quad \Rightarrow \quad f(x)\to-\infty$

   $x\to\infty \quad \Rightarrow \quad f(x)\to\infty$

b) Funktion und Ableitungen:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x^3}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8 \cdot \sqrt{x^5}}$$

Definitionsbereich:

$$D = \mathbb{R}^+$$

Nullstellen:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Extremstellen:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\ \}$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\ \}$$

Verhalten im Unendlichen:

$$x \to \infty \qquad \Rightarrow \quad f(x) \to \infty$$

3. Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

a)
$$f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$$
$$f''(x) = -4 \cdot \sin(2x)$$

b)
$$f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 12x^2$$

c)
$$f'(x) = \frac{6x}{4}$$
$$f''(x) = \frac{6}{4}$$

d)
$$f'(x) = -\frac{1}{x}$$
$$f''(x) = \frac{1}{x^2}$$

e)
$$f'(x) = \frac{8}{x^3}$$
$$f''(x) = -\frac{24}{x^4}$$

4. Prüfen Sie, ob die Funktion Extremwerte besitzt und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad f''(0) > 0 \quad \Rightarrow TP\ bei\ (0,0)$

b) $f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad immer \neq 0 \Rightarrow keine\ Extremwerte$

c) $f'(x) = 2x + 8 \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4 \quad \Rightarrow \quad f''(-4) > 0 \quad \Rightarrow TP\ bei\ (-4,0)$

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

d)
$$\Rightarrow \quad f''\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) < 0 \quad \Rightarrow HP\ bei\ \left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{52}{3} - \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f''\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) > 0 \quad \Rightarrow TP\ bei\ \left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{52}{3} + \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)$$

e) $f'(x)=3 \quad \Rightarrow \quad immer \neq 0 \Rightarrow keine\ Extremwerte$

Anwendungsaufgaben (zur Vertiefung/Veranschaulichung der Inhalte (nicht klausurrelevant, Taschenrechner (einfacher Art) kann eingesetzt werden))

5. Welches Rechteck mit dem Umfang 30 cm hat die kürzeste Diagonale?

$$GF: \quad 2x+2y=30 \quad \rightarrow \quad y=15-x$$
$$ZF: \quad \sqrt{x^2+(15-x)^2} \rightarrow \min$$

$$f(x)=\sqrt{2x^2-30x+225}$$
$$f'(x)=\frac{2x-15}{\sqrt{2x^2-30x+225}}$$
$$f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{15}{2}$$
$$f''(x)=\frac{225}{\sqrt{(2x^2-30x+225)^3}}$$
$$f''\left(\frac{15}{2}\right)>0 \quad \Rightarrow x=\frac{15}{2}$$
$$y=15-\frac{15}{2}=\frac{15}{2}$$

Antwort: Das Rechteck mit der kürzesten Diagonale hat die Seitenlängen $x = y = 7.5cm$.

6. Für welche der beiden positiven Zahlen, deren Produkt 8 ist, wird die Summe am kleinsten?

$$GF: \quad x\cdot y=8 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{8}{x}$$
$$ZF: \quad x+\frac{8}{x}$$

$$f'(x)=1-\frac{8}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{8}$$
$$f''(x)=\frac{16}{x^3} \qquad \Rightarrow \quad f''\left(-\sqrt{8}\right)<0,\ ein\ HP,\ fällt\ daher\ weg,\ \ f''\left(\sqrt{8}\right)>0$$
$$\Rightarrow x=\sqrt{8}$$
$$y=\frac{8}{\sqrt{8}}=\sqrt{8}$$

Antwort: Die beiden Zahlen $x = y = \sqrt{8}$ ergeben die größte Summe.

7. Der Wasserstand h (in m) bei Spiekeroog an der Nordseeküste schwankt zwischen 0 m bei Niedrigwasser und etwa 3 m bei Hochwasser. Es wird davon ausgegangen, dass die Tidezeit zwischen Hoch- und Niedrigwasser genau 6 Stunden beträgt.
Der Wasserstand lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t (in Std. nach Hochwasser) modellhaft beschreiben durch

$$h(t) = a + b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

a) Bestimmen Sie die Parameter für a und b.
b) Zu welchen Zeitpunkten innerhalb von 24 Stunden steigt der Wasserstand am stärksten?
c) Ein Fährschiff hat einen Tiefgang von 1,5 m. Innerhalb welcher Zeiträume kann das Schiff die Insel in den nächsten 24 Stunden anlaufen?

a) Aus der Aufgabenstellung kann man entnehmen, dass zu Beginn der Zeitmessung Hochwasser (3m Wasserpegel) ist, es muss also gelten $h(0) = 3$. Nach 6 Stunden muss Niedrigwasser sein, es gilt also $h(6) = 0$. Setzt man nun diese beiden Werte ein, ergibt sich ein LGS mit zwei Gleichungen, aus denen a und b bestimmt werden können.

$$a + b \cdot \cos(0) = a + b = 3 \;\Rightarrow\; a = 3 - b$$

$$a + b \cdot \cos(\pi) = a - b = 0 \;\Rightarrow -2b = -3 \;\Rightarrow b = 1{,}5$$

$$\Rightarrow a = b = 1{,}5$$

b) Dazu werden zunächst die ersten zwei Ableitungen gebildet, weil nach Wendestellen gefragt ist.

$$h(t) = 1{,}5 + 1{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

$$h'(t) = -\frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

$$h''(t) = -\frac{\pi^2}{24} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

Jetzt werden mögliche Kandidaten für Wendestellen im Intervall $[0,24]$ gesucht, wohlwissend, dass nur jede zweite Stelle einen Anstieg bedeutet:

$$h''(t) = 0 \;\; für \; [0,24] \Rightarrow t_1 = 3, t_2 = 9, t_3 = 15 \;\; und \;\; t_4 = 21$$

Da der Wasserstand zunächst im Intervall $[0,6]$ abfällt, entfällt die erste Stelle. Genauso entfällt die dritte, auch dort fällt der Wasserstand. Übrig bleiben die zwei Zeitpunkte

$$t_2 = 9 \;\; und \;\; t_4 = 21$$

Der stärkste Anstieg ist also nach 9 und nach 21 Stunden vorhanden.

c) Hier muss man prüfen, wann die Funktion $h(t) \geq 1,5$ ist. Dazu setzt man den Wert ein und löst die Gleichung. Durch den Cosinus ergeben sich an dieser Stelle mehrere Werte für die entsprechenden Intervalle.

$$h(t) = 1,5 \qquad t_1 = 3, t_2 = 9, t_3 = 15, t_4 = 21$$
$$\Rightarrow I_1 = [0,3]$$
$$\Rightarrow I_2 = [9,15]$$
$$\Rightarrow I_3 = [21,24]$$

Zum Zeitpunkt t = 0 ist der Wasserstand 3m, daher muss das Intervall hier beginnen. Zum Zeitpunkt t = 24 ist der Wasserstand wieder 3m, daher reicht das letzte Intervall bis hier. Alle anderen Intervallgrenzen ergeben sich aus den Lösungen im Intervall $[0, 24]$.

Das Schiff kann also zwischen 0 Uhr und 3 Uhr, zwischen 9 Uhr und 15 Uhr und zwischen 21 Uhr und 24 Uhr die Insel anlaufen.