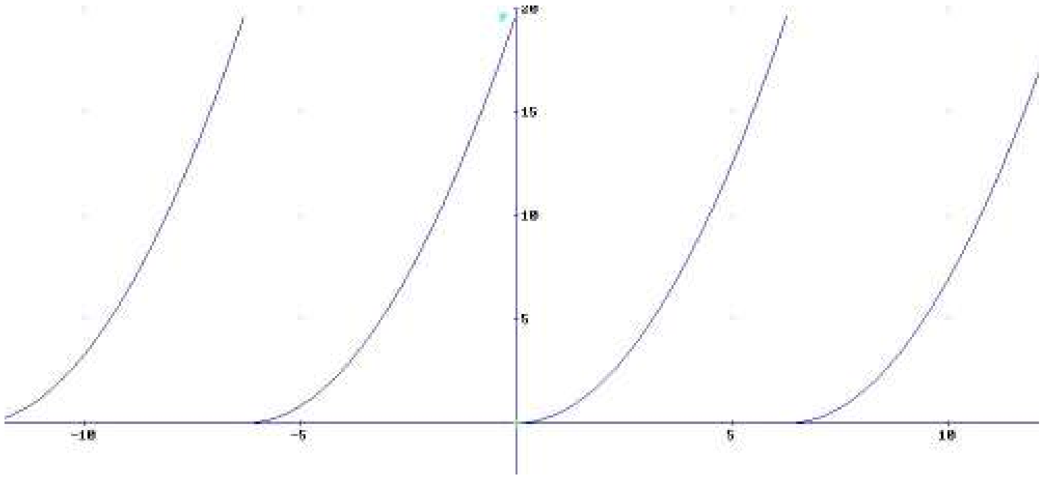
Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Fourier Reihen 2π-periodischer Funktionen (+ Lösungen)

1) Die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{2}$ sei auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ stetig und auf ganz $\mathbb{R}$ 2π -periodisch fortgesetzt. Berechnen Sie die Fourier Reihe von f. Zeichnen Sie eine Skizze des Graphen.

   Zunächst zeichnen wir eine Skizze der Funktion, um Aussagen zur Symmetrie machen zu können.



   Das Bild zeigt, dass jene Funktion weder gerade noch ungerade ist. Daher ist es so wichtig, den Graphen vor Augen zu haben. Bei $f(x) = \frac{x^2}{2}$ könnte man nämlich auch schnell auf die Idee kommen, dass der Graph achsensymmetrisch ist.

   Berechnung der Fourier Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{(2\pi)^3}{3} \right) = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{x^2}{2} \cdot \cos(kx)\, dx$$

$$2\pi \cdot a_k = x^2 \cdot \frac{\sin(kx)}{k}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{2}{k} \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \sin(kx)\, dx$$

$$= -\frac{2}{k} \cdot \left(-\frac{x \cdot \cos(kx)}{k}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{k} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx \right)$$

$$= -\frac{2}{k} \cdot \left(-\frac{2\pi \cdot \cos(k \cdot 2\pi)}{k} + \frac{1}{k} \cdot \frac{\sin(kx)}{k}\Bigg|_0^{2\pi} \right)$$

$$2\pi \cdot a_k = -\frac{2}{k} \cdot -\frac{2\pi}{k} = \frac{4\pi}{k^2}$$

$$a_k = \frac{2}{k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{x^2}{2} \cdot \sin(kx)\, dx$$

$$2\pi \cdot b_k = -x^2 \cdot \frac{\cos(kx)}{k}\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{2}{k} \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(kx)\, dx$$

$$= -\frac{4\pi^2}{k} + \frac{2}{k} \cdot \left(x \cdot \frac{\sin(kx)}{k}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin(kx)\, dx \right)$$

$$= -\frac{4\pi^2}{k} + \frac{2}{k} \cdot \left(-\frac{1}{k} \cdot -\frac{\cos(kx)}{k}\Bigg|_0^{2\pi} \right)$$

$$= -\frac{4\pi^2}{k} + \frac{2}{k} \cdot \left(-\frac{1}{k} \cdot \left(-\frac{\cos(k \cdot 2\pi)}{k} + \frac{\cos(k \cdot 0)}{k} \right) \right)$$

$$2\pi \cdot b_k = -\frac{4\pi^2}{k}$$

$$b_k = -\frac{2\pi}{k}$$

Mit den ermittelten Koeffizienten lässt sich die Fourier Reihe nun schreiben als

$$\frac{2\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^2} \cdot \cos(kx) - \frac{2\pi}{k} \cdot xin(kx) \right)$$

(Nicht vergessen!! In der Reihe steht $\frac{a_0}{2}$)

Mit einem CAS System kann man das Ergebnis durch Zeichnen des Graphen für z.B. k bis 100 prüfen. Der Graph muss dann ungefähr die Form der Funktion f annehmen, wobei die Konvergenzkriterien beachtet werden müssen. Um diese Darstellung einmal zu zeigen, folgt nun ein Bild des Graphen der Fourierreihe, wenn k bis 100 läuft und die Reihe danach abgebrochen wird.

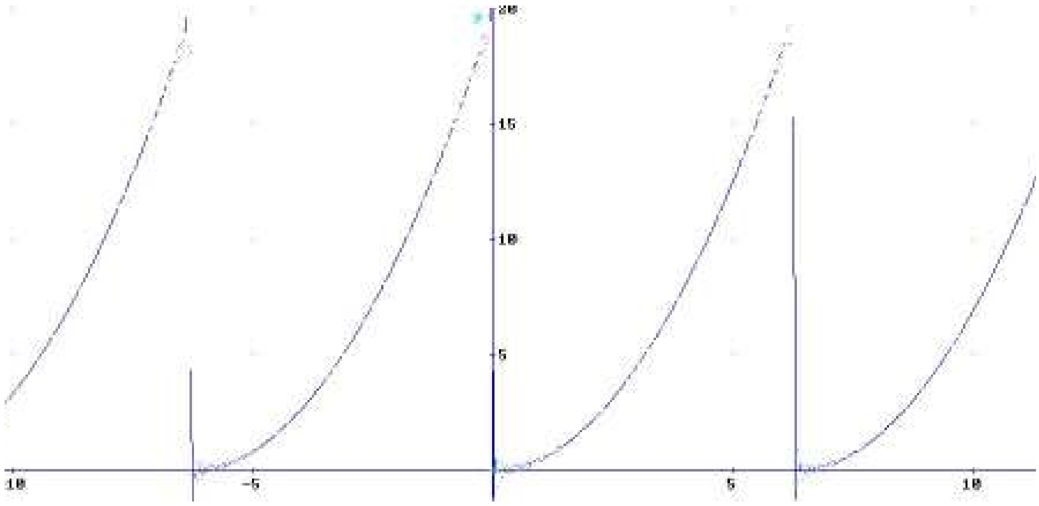
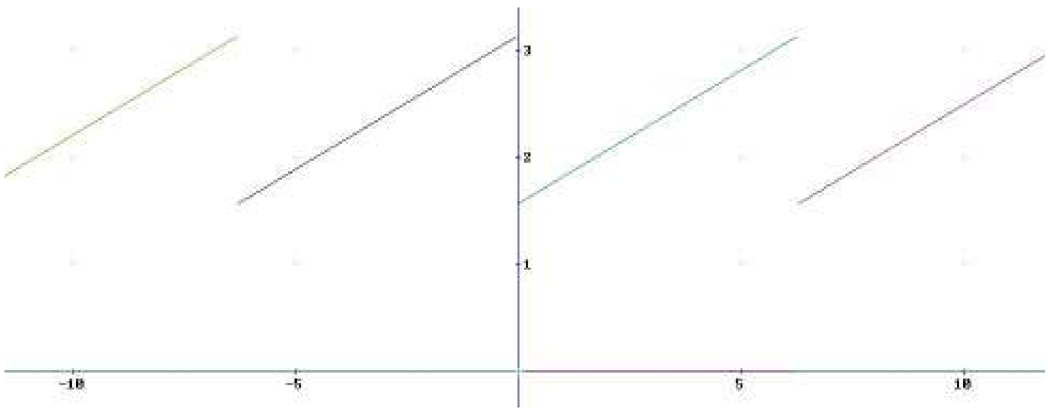


Bild der Funktion der Fourier Reihe für k bis 100.

2) Die Funktion $f(x)=\dfrac{x}{4}+\pi$ sei auf dem Intervall $[-2\pi,0]$ stetig und auf ganz $\mathbb{R}$ 2π -periodisch fortgesetzt. Berechnen Sie die Fourier Reihe von f. Zeichnen Sie eine Skizze des Graphen.

Graph von f:



Das Bild lässt vermuten, dass die Funktion weder gerade noch ungerade ist.

Berechnung der Fourier Koeffizienten:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{x}{4}+\pi\right)dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\int_0^{2\pi}x\,dx+\pi\cdot\int_0^{2\pi}1\,dx\right)$$
$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4\pi^2}{2}-0\right)+\pi\cdot(2\pi-0)\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{4\pi^2}{2}\right)$$
$$=\frac{5\pi^2}{2\pi}=\frac{5\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{x}{4} + \pi \right) \cdot \cos(kx)\,dx$$

$$\pi \cdot a_k = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \cos(kx)\,dx + \pi \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx$$

$$= \left(\left. \frac{x \cdot \sin(kx)}{4k} \right|_0^{2\pi} - \frac{1}{4k} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(kx)\,dx \right) + \left. \frac{\pi \cdot \sin(kx)}{k} \right|_0^{2\pi}$$

$$= \left. \frac{\cos(kx)}{4k^2} \right|_0^{2\pi} = \frac{1}{4k^2} - \frac{1}{4k^2} = 0$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{x}{4} + \pi \right) \cdot \sin(kx)\,dx$$

$$\pi \cdot b_k = \frac{1}{4} \cdot \int_0^{2\pi} x \cdot \sin(kx)\,dx + \pi \cdot \int_0^{2\pi} \sin(kx)\,dx$$

$$= \left(- \left. \frac{x \cdot \cos(kx)}{4k} \right|_0^{2\pi} + \frac{1}{4k} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx \right) - \left. \frac{\pi \cdot \cos(kx)}{k} \right|_0^{2\pi}$$

$$= \left(-\frac{2\pi}{4k} + \frac{1}{4k} \cdot \left. \frac{\sin(kx)}{k} \right|_0^{2\pi} \right) - \frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{k}$$

$$\pi \cdot b_k = -\frac{\pi}{2k}$$

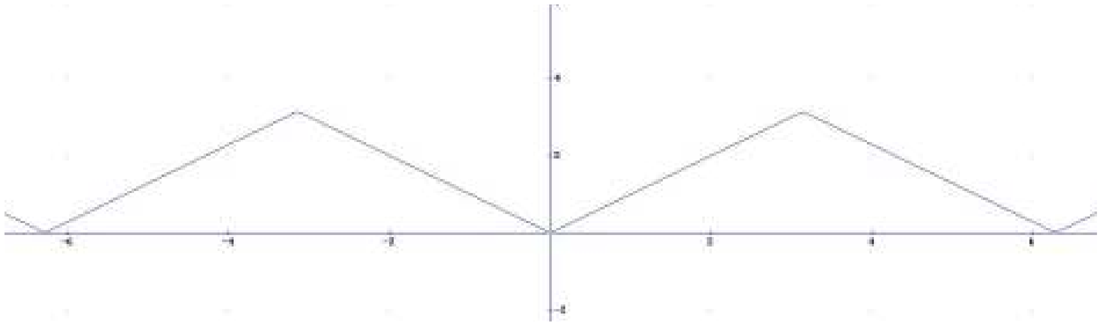
$$b_k = -\frac{1}{2k}$$

Die Fourier Reihe von f lautet also:

$$\frac{5\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{\sin(kx)}{2k}$$

3) Die Funktion $f(x)=|x|$ sei auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ stetig und auf ganz $\mathbb{R}$ 2π -periodisch fortgesetzt. Berechnen Sie die Fourier Reihe von f. Zeichnen Sie eine Skizze des Graphen.

Zunächst wird auch hier eine Skizze des Graphen gezeichnet:



Die Skizze zeigt, dass der Graph achsensymmetrisch ist. Dies kann man sich gleich doppelt zu Nutze machen. Zum einen entfällt die Berechnung von b_k, zum anderen kann man das Integral für die anderen Berechnungen einfach verdoppeln und mit der halben Intervallbreite rechnen. Dadurch macht auch das Betragszeichen kein Problem mehr, weil es nicht beachtet werden muss, denn im Intervall $[0,\pi]$ ist die Funktion zur Berechnung $f(x)=x$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^\pi=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\pi x\cdot\cos(kx)\,dx$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot a_k=\left.\frac{x\cdot\sin(kx)}{k}\right|_0^\pi-\frac{1}{k}\cdot\int_0^\pi\sin(kx)\,dx$$

$$=-\frac{1}{k}\cdot-\left.\frac{\cos(kx)}{k}\right|_0^\pi$$

$$=-\frac{1}{k}\cdot\left(-\frac{(-1)^k}{k}+\frac{1}{k}\right)$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{(-1)^k-1}{k^2}\right)=\frac{2\cdot(-1)^k-2}{\pi\cdot k^2}$$

Die Fourier Reihe von f lautet demnach:

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^k-2}{\pi\cdot k^2}\cdot\cos(kx)$$

Da f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist (keine Sprungstellen), gilt in diesem Fall

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^k-2}{\pi\cdot k^2}\cdot\cos(kx)$$