Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt 4: Lösungen

Aufg. 1:

a) Der Funktionsterm dieser Funktion lautet:

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ falls -\infty \le x < -1 \\ 1,\ falls\ -1 \le x < 1 \\ 0,\ falls 1 \le x < \infty \end{cases}$$

b)

$$\hat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-1}^{1}1dx=\frac{1}{2\pi}\cdot(1+1)=\frac{1}{\pi}$$

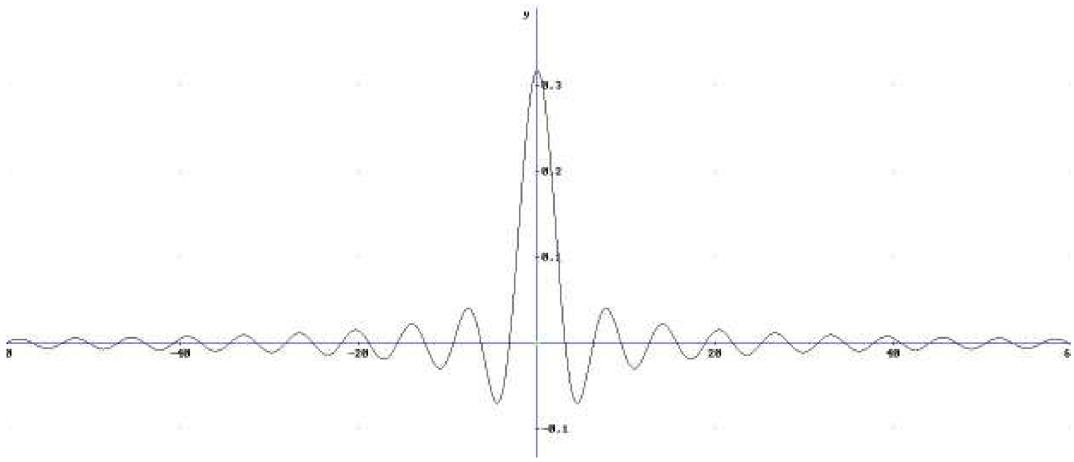
c)

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-1}^{1}e^{-i\omega x}dx\\ &=\frac{1}{2\pi}\cdot -\frac{e^{-i\omega x}}{i\omega}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{e^{-i\omega}}{i\omega}+\frac{e^{i\omega}}{i\omega}\right)\\ &=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{i\omega}=\frac{1}{\omega\pi}\cdot\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}\\ &=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(\omega)}{\omega}\end{aligned}$$

Das Ergebnis zeigt, warum man vorher die Berechnung von $\hat{f}(0)$ durchführen musste. Der Funktionsterm wäre an der Stelle $\omega=0$ (Gleichanteil bei 0Hz) sonst nicht definiert. So können wir als Ergebnis der Fourier-Transformation schreiben:

$$\hat{f}(\omega)=\begin{cases} \frac{1}{\pi},\ falls\ \omega=0 \\ \frac{\sin(\omega)}{\pi\omega},\ falls\ \omega\ne 0 \end{cases}$$

d) Das kontinuierliche Spektrum ergibt sich durch das Einsetzen von verschiedenen Werten für ω. Dadurch entsteht eine Kurve, die die Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz zeigt. An dieser Stelle sollte auch der Unterschied zur Fourier-Reihe deutlich werden, die im Spektrum nur Linien bei einzelnen Frequenzen enthält.



e) Die Ermittlung von $\hat{f}(0)$ mit Hilfe von $\hat{f}(\omega)$ passiert mit der Regel von de l'Hôptial. Hier wird ein Grenzwert der Form $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \to \frac{0}{0}$ gesucht, daher setzt man mit den Ableitungen an.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(\omega)}{1} = \frac{1}{\pi}$$

Aufg. 2:

a) In diesem Fall muss man den Funktionsgraphen aus dem Koordinatensystem ungefähr ablesen. Es ergibt sich:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ falls\ -\infty \le x < 0 \\ \frac{7}{5}x, \ falls\ 0 \le x < 5 \\ 0, \ falls\ 5 \le x < \infty \end{cases}$$

b)

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^5 \frac{7}{5} x \, dx = \frac{7}{10\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \bigg|_0^5 = \frac{7}{10\pi} \cdot \frac{25}{2} = \frac{35}{4\pi}$$

c) Bei der Berechnung von $\hat{f}(\omega)$ sollten bestimmte Regeln und Vereinfachungsarten genutzt werden, um hinterher das Ergebnis vergleichen zu können:

- Ergebnis immer als Real- und Imaginärteil angeben
- Eulersche Formel für komplexe Zahlen beachten:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

$$e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi)$$

- Umformungen, wenn die imaginäre Einheit im Nenner steht:

  $\frac{1}{i} = -i$

  $\frac{1}{-i\omega} = \frac{i}{\omega}$

Berechnung von $\hat{f}(\omega)$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^5 \frac{7}{5} x \cdot e^{-i\omega x} dx \\
&= \frac{7}{10\pi} \cdot \int_0^5 x \cdot e^{-i\omega x} dx = \frac{7}{10\pi} \cdot \left(-\frac{x \cdot e^{-i\omega x}}{i\omega} \Big|_0^5 + \frac{1}{i\omega} \cdot \int_0^5 e^{-iwx} dx \right) \\
&= \frac{7}{10\pi} \cdot \left(-\frac{5 \cdot e^{-5i\omega}}{i\omega} - \frac{i}{\omega} \cdot -\frac{e^{-i\omega x}}{i\omega} \Big|_0^5 \right) \\
&= -\frac{7 \cdot e^{-5i\omega}}{2\pi i\omega} + \frac{7}{10\pi} \left(-\frac{i}{\omega} \cdot \left(-\frac{e^{-5i\omega}}{i\omega} + \frac{1}{i\omega} \right) \right) \\
&= -\frac{7 \cdot e^{-5i\omega}}{2\pi i\omega} + \frac{7}{10\pi} \cdot \left(\frac{e^{-5i\omega} - 1}{\omega^2} \right) \\
&= -\frac{7 \cdot e^{-5i\omega}}{2\pi i\omega} + \frac{7 \cdot \left(e^{-5i\omega} - 1 \right)}{10\pi\omega^2} \\
&= \frac{7i \cdot \left(\cos(5\omega) - i \cdot \sin(5\omega) \right)}{2\pi\omega} + \frac{7 \cdot \left(\cos(5\omega) - i \cdot \sin(5\omega) \right)}{10\pi\omega^2} - \frac{7}{10\pi\omega^2} \\
&= \frac{7i \cdot \cos(5\omega)}{2\pi\omega} + \frac{7 \cdot \sin(5\omega)}{2\pi\omega} + \frac{7 \cdot \cos(5\omega)}{10\pi\omega^2} - \frac{7i \cdot \sin(5\omega)}{10\pi\omega^2} - \frac{7}{10\pi\omega^2} \\
&= \frac{7 \cdot \sin(5\omega)}{2\pi\omega} + \frac{7 \cdot \cos(5\omega)}{10\pi\omega^2} - \frac{7}{10\pi\omega^2} + i \cdot \left(\frac{7 \cdot \cos(5\omega)}{2\pi\omega} - \frac{7 \cdot \sin(5\omega)}{10\pi\omega^2} \right)
\end{aligned}$$

$\hat{f}(\omega)$ lässt sich also schreiben als:

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{35}{4\pi}, \; falls\; \omega = 0 \\ \dfrac{7 \cdot \sin(5\omega)}{2\pi\omega} + \dfrac{7 \cdot \cos(5\omega)}{10\pi\omega^2} - \dfrac{7}{10\pi\omega^2} + i \cdot \left(\dfrac{7 \cdot \cos(5\omega)}{2\pi\omega} - \dfrac{7 \cdot \sin(5\omega)}{10\pi\omega^2} \right), \; falls\; \omega \neq 0 \end{cases}$$