**Tutorium Mathe 1 MT**

**Übungsblatt 1:** **Lösungen**

1. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der Folgen.

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{6n+9}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{9}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{6}{2}=3$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{6^n+\sqrt{2}}{2^n+6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(6^n+\sqrt{2}\right)\cdot 6^{-n}}{\left(2^n+6^n\right)\cdot 6^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{6^{-n}}\right)}{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n+1\right)}=1$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+2}+\sqrt{5^n}}{5^n+5^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(5^{n+2}+\sqrt{5^n}\right)\cdot 5^{-n}}{\left(5^n+5^{n-1}\right)\cdot 5^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(5^2+\frac{5^{\frac{n}{2}}}{5^n}\right)}{\left(1+5^{-1}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(25+\frac{1}{5^{\frac{n}{2}}}\right)}{\left(1+\frac{1}{5}\right)}=\frac{25\cdot 5}{6}=\frac{125}{6}$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{4}}}{n^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{4}}\cdot\left(n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+1\right)}{n^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{12}}}{n^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}+\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}=0$$

2. Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren

a) $2x^4+12x^3-44x+30$

Durch Probieren erhält man eine Nullstelle bei $x_0=1$. Damit kann mit Hilfe des Horner Schemas vereinfacht werden:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 12 | 0 | -44 | 30 |
| $x_0=1$ | | 2 | 14 | 14 | -30 |
| | 2 | 14 | 14 | -30 | 0 |

➔ $2x^4 + 12x^3 - 44x + 30 = (x-1) \cdot (2x^3 + 14x^2 + 14x - 30)$

Im vereinfachten Ausdruck befindet sich ebenfalls eine Nullstelle bei $x_1 = 1$. Das Polynom besitzt also an diesem Punkt eine doppelte Nullstelle und kann nun erneut mit dem Horner Schema vereinfacht werden.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 14 | 14 | -30 |
| $x_1 = 1$ | | 2 | 16 | 30 |
| | 2 | 16 | 30 | 0 |

➔ $2x^4 + 12x^3 - 44x + 30 = (x-1)^2 \cdot (2x^2 + 16x + 30)$

Nun kann nach Umstellung in die Normalform die p-q-Formel zur Ermittlung der weiteren Lösungen genutzt werden.

$$2x^2 + 16x + 30 = 0 \quad \Big| :2$$
$$x^2 + 8x + 15 = 0$$
$$x_{2,3} = -4 \pm \sqrt{16 - 15} = -4 \pm 1$$
$$x_2 = -5$$
$$x_3 = -3$$

Es ergibt sich daraus die folgende Darstellung in Linearfaktoren:

$$2x^4 + 12x^3 - 44x + 30 = 2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x+3) \cdot (x+5)$$

b) $3x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 81x + 81$

Durch Probieren ergibt sich $x_0 = -1$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 3 | -36 | -36 | 81 | 81 |
| $x_0 = -1$ | | -3 | 0 | 36 | 0 | -81 |
| | 3 | 0 | -36 | 0 | 81 | 0 |

➔ $3x^5 + 3x^4 - 36x^3 - 36x^2 + 81x + 81 = (x-1) \cdot (3x^4 - 36x^2 + 81)$

Durch Substitution und anschließender Verwendung der p-q-Formel ergeben sich die restlichen Linearfaktoren.

$$3x^4-36x^2+81=0 \qquad |:3$$
$$x^4-12x^2+27=0 \qquad |SUB\ z=x^2$$
$$z^2-12z+27=0$$
$$z_{1,2}=6\pm\sqrt{36-27}=6\pm 3$$
$$z_1=3\rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$$
$$z_2=9\rightarrow x_{3,4}=\pm 3$$

Es ergibt sich daraus die folgende Darstellung in Linearfaktoren:

$$3x^5+3x^4-36x^3-36x^2+81x+81$$
$$=3\cdot(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x+3)\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)$$

c) $x^5+4x^4+4x^3-6x^2-37x-30$

Durch Probieren ergibt sich $x_0=-1$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 4 | -6 | -37 | -30 |
| $x_0=-1$ | | -1 | -3 | -1 | 7 | 30 |
| | 1 | 3 | 1 | -7 | -30 | 0 |

➔ $x^5+4x^4+4x^3-6x^2-37x-30=(x+1)\cdot x^4+3x^3+x^2-7x-30$

Das reduzierte Polynom hat eine Nullstelle bei $x_1=2$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | 1 | -7 | -30 |
| $x_1=2$ | | 2 | 10 | 22 | 30 |
| | 1 | 5 | 11 | 15 | 0 |

➔ $x^5+4x^4+4x^3-6x^2-37x-30=(x+1)\cdot(x-2)\cdot x^3+5x^2+11x+15$

Das reduzierte Polynom hat eine Nullstelle bei $x_2=-3$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 5 | 11 | 15 |
| $x_2=-3$ | | -3 | -6 | -15 |
| | 1 | 2 | 5 | 0 |

➔ $x^5+4x^4+4x^3-6x^2-37x-30=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot x^2+2x+5$

Das Polynom hat $x^2+2x+5$ keine reellen Nullstellen. Daher kann der Ausdruck nicht weiter vereinfacht werden.

d) $-2x^3+8x^2-8x$

Zunächst wird ein x ausgeklammert, dadurch ergibt sich $x_0=0$. Der Ausdruck kann anschließend mit der p-q-Formel gelöst werden.

$$x\cdot\left(-2x^2+8x-8\right)\Rightarrow x_0=0$$

$$\begin{aligned}-2x^2+8x-8&=0 \quad \Big|:-2\\ x^2-4x+4&=0\\ x_{1,2}&=2\pm\sqrt{4-4}=2\end{aligned}$$

Die zugehörige Linearkombination lautet $-2x\cdot\left(x-2\right)^2$.

e) $-x^3-6x^2-12x-8$

Durch Probieren erhält man $x_0=-2$.

| | -1 | -6 | -12 | -8 |
|---|---|---|---|---|
| $x_0=-2$ | | 2 | 8 | 8 |
| | -1 | -4 | -4 | 0 |

➔ $-x^3-6x^2-12x-8=\left(x+2\right)\cdot\left(-x^2-4x-4\right)$

Nun werden die weiteren Lösungen mit Hilfe der p-q-Formel ermittelt.

$$\begin{aligned}-x^2-4x-4&=0 \quad \Big|:-1\\ x^2+4x+4&=0\\ x_{1,2}&=-2\pm\sqrt{4-4}=-2\end{aligned}$$

Die zugehörige Linearkombination lautet $-\left(x+2\right)\cdot\left(x+2\right)^2=-\left(x+2\right)^3$.

3. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe der entsprechenden Rechenregeln

a) $\ln\left(e^5\right)=5$

b) $\log_2\left(1024\right)=10$

c) $\log_4\left(\sqrt{64}\right)=\frac{1}{2}\cdot\log_4\left(64\right)=\frac{3}{2}$

d) $\ln\left(\sqrt[5]{e^7}\right)=\frac{7}{5}$

e) $\log_{12}(144) = 2$

f) $\lg(100 \cdot 10^{24}) = \lg(100) + \lg(10^{24}) = 26$

g) $\log_2\left(\frac{2^{20}}{128} \cdot 512\right) = \log_2(2^{20}) + \log_2(512) - \log_2(128) = 20 + 9 - 7 = 22$

h) $\ln(e^5) + \ln(\sqrt{e}) = \frac{11}{2}$

i)

$$\ln\left(e^{(\log_2(512) - \log_4(64))} \cdot \sqrt{e^7}\right) - \log_2\left(\frac{16}{2^{10}}\right)$$

$$= \left(\ln(e^6) + \ln\left(\sqrt{e^7}\right)\right) - \left(\log_2(16) - \log_2(2^{10})\right)$$

$$= \frac{19}{2} + \frac{12}{2} = \frac{31}{2}$$

4. Berechnen Sie die resultierende Schwingung aus den beiden angegebenen Schwingungen

a) $5 \cdot \sin(2t),\ 4 \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$

Umwandlung von cos-Schwingung in sin-Schwingung:

$$4 \cdot \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Berechnung von Amplitude und Phasenwinkel:

$$A = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{61} \approx 7{,}81$$

$$\tan(\varphi) = \frac{5 \cdot \sin(0) + 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{5 \cdot \cos(0) + 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \approx \frac{3{,}464}{7} \approx 0{,}495$$

$$\varphi = \arctan(0{,}495) = 0{,}46 \mathrel{\hat{=}} 26{,}3°$$

Die resultierende Schwingung lautet:

$$7{,}81 \cdot \sin(2t + 0{,}46)$$

b) $6\cdot\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right),\ 2\cdot\sin\left(\omega t+\frac{5\pi}{6}\right)$

Berechnung von Amplitude und Phasenwinkel:

$$A=\sqrt{6^2+2^2+2\cdot 6\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{6}\right)}=\sqrt{52}\approx 7,21$$

$$\tan(\varphi)=\frac{6\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{6\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}\approx\frac{7}{-0,866}\approx -8,082$$

$$\varphi=\arctan(-8,082)+\pi=1,693\mathrel{\hat{=}}97°$$

Die resultierende Schwingung lautet:

$$7,21\cdot\sin(\omega t+1,693)$$