Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Uneigentliche Integrale (+ Lösungen)

1) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_2^{\infty} \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}\,dx$.

   (Hinweis: Substitution $y = 1 - x^2$)

   $SUB:$

   $$y = 1 - x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{-2x}$$

   Mit dem Einsetzen der Substitution ergibt sich:

   $$\int_2^{\infty} \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}\,dx = \int_2^{b} \frac{2x}{y^2} \cdot \frac{dy}{-2x} = -\int_2^{b} \frac{1}{y^2}\,dy = \left.\frac{1}{y}\right|_2^b = \left.\frac{1}{1-x^2}\right|_2^b$$

   $$= \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{3}$$

   $$\to \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

2) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx$.

   (Hinweis: Substitution $y = e^{2x}$)

   $SUB:$

   $$y = e^{2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \cdot e^{2x} \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{2 \cdot e^{2x}}$$

   Mit dem Einsetzen der Substitution ergibt sich:

   $$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx = \int_0^{b} \frac{1}{y+1} \cdot \frac{dy}{2 \cdot y} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{b} \frac{1}{y^2+y}\,dy$$

   An dieser Stelle muss man die Partialbruchzerlegung anwenden, um den Ausdruck zu vereinfachen. Dazu bestimmt man zunächst die Nenner-Nullstellen und stellt dann den Ansatz auf:

   $$y^2 + y = 0 \to y_1 = 0$$
   $$y \cdot \left(y+1\right) = 0 \to y_2 = -1$$

   $$\frac{1}{y^2 - y} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1}$$
   $$1 = A \cdot \left(x+1\right) + B \cdot x$$

Durch Einsetzen von $x=0$ und $x=-1$:

$1=A$

$1=-B$

Man erhält nach dem Einsetzen dieses Ansatzes:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^b \frac{1}{y}\,dy-\int_0^b \frac{1}{y+1}\,dy\right) &= \frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left(|y|\right)\Big|_0^b-\ln\left(|y+1|\right)\Big|_0^b\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left(e^{2x}\right)\Big|_0^b-\ln\left(e^{2x}+1\right)\Big|_0^b\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left(e^{2b}\right)-\ln\left(1\right)-\ln\left(e^{2b}+1\right)+\ln\left(2\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left(\frac{e^{2b}}{e^{2b}+1}\right)+\ln\left(2\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left(\frac{e^{2b}+1-1}{e^{2b}+1}\right)+\ln\left(2\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left(1-\frac{1}{e^{2b}+1}\right)+\ln\left(2\right)\right)\\
&\to \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left(1-\frac{1}{e^{2b}+1}\right)+\ln\left(2\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(2\right)
\end{aligned}$$

3) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x^2-x}\,dx$.

Der Ansatz ist hier die Partialbruchzerlegung:

Nullstellen des Nenners:

$$x^2-x=0\to x_1=0$$

$$x\cdot\left(x-1\right)=0\to x_2=1$$

Aufstellen des Ansatzes:

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$$

$$1=A\cdot\left(x-1\right)+B\cdot x$$

Durch Einsetzen von $x=0$ und $x=1$ ergibt sich:

$1=-A$

$1=B$

So erhält man:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2-x}\,dx = -\int_2^b \frac{1}{x}\,dx + \int_2^b \frac{1}{x-1}\,dx = \ln\left(|x|\right)\Big|_2^b + \ln\left(|x-1|\right)\Big|_2^b$$

$$= -\ln\left(|b|\right) + \ln(2) + \ln\left(|b+1|\right) - \ln(1)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(\frac{|b+1|}{|b|}\right)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{|b|}\right)$$

$$\to \lim_{b\to\infty} \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{|b|}\right) = \ln(2)$$

4) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

$SUB:$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \Leftrightarrow dx = 2\cdot\sqrt{x}\cdot dy = 2y\cdot dy$$

Mit dem Einsetzen der Substitution ergibt sich:

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^b \frac{e^{-y}}{y}\cdot 2y\cdot dy = 2\cdot\int_1^b e^{-y}\,dy = -2\cdot e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^b = -2\cdot e^{-\sqrt{b}} + 2\cdot e^{-\sqrt{1}}$$

$$\to \lim_{b\to\infty} -2\cdot e^{-\sqrt{b}} + 2\cdot e^{-1} = 2\cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$$