Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Fourier Reihen 2π-periodischer Funktionen (Teil 2)

1) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $\left[-\pi,\pi\right[$ durch $f\left(x\right)=x^3$ definiert und 2π -periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Berechnen Sie die Fourier Reihe von f .

   Die Funktion ist im angegebenen Intervall ungerade, das heißt, es müssen nur Sinus-Anteile, also die Fourierkoeffizienten a_0 und b_k berechnet werden.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}x^3\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi^4}{4}-\frac{\pi^4}{4}\right)=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}x^3\cdot\sin\left(kx\right)dx$$

$$\pi\cdot b_k=-\left.\frac{x^3\cdot\cos\left(kx\right)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}+\frac{3}{k}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cdot\cos\left(kx\right)dx$$

$$=-\frac{\pi^3\cdot\left(-1\right)^k}{k}-\frac{\pi^3\cdot\left(-1\right)^k}{k}+\frac{3}{k}\cdot\left(\left.\frac{x^2\cdot\sin\left(kx\right)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{k}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}x\cdot\sin\left(kx\right)dx\right)$$

$$=-\frac{2\pi^3\cdot\left(-1\right)^k}{k}+\frac{3}{k}\cdot\left(-\frac{2}{k}\cdot\left(-\left.\frac{x\cdot\cos\left(kx\right)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(kx\right)dx\right)\right)$$

$$=-\frac{2\pi^3\cdot\left(-1\right)^k}{k}-\frac{6}{k^2}\cdot\left(-\frac{2\pi\cdot\left(-1\right)^k}{k}+\frac{1}{k}\cdot\left.\frac{\sin\left(kx\right)}{k}\right|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$\pi\cdot b_k=-\frac{2\pi^3\cdot\left(-1\right)^k}{k}+\frac{12\pi\cdot\left(-1\right)^k}{k^3}$$

$$b_k=-\frac{2\pi^2\cdot\left(-1\right)^k}{k}+\frac{12\cdot\left(-1\right)^k}{k^3}$$

Fourier-Reihe von f :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2\pi^2\cdot\left(-1\right)^k}{k}+\frac{12\cdot\left(-1\right)^k}{k^3}\right)\cdot\sin\left(kx\right)$$

2) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $[0,2\pi[$ durch $f(x)=\pi-x$ definiert und 2π - periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Berechnen Sie die Fourier Reihe von f .

Es ist davon auszugehen, dass die Funktion weder gerade noch ungerade ist, dass also alle drei Fourierkoeffizienten berechnet werden müssen.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} \pi - x\,dx$$

$$\pi\cdot a_0 = \pi\cdot\int_0^{2\pi} 1\,dx - \int_0^{2\pi} x\,dx = \pi\cdot x\Big|_0^{2\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 - 2\pi^2 = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} (\pi - x)\cdot\cos(kx)\,dx$$

$$\pi\cdot a_k = \pi\cdot\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,dx - \int_0^{2\pi} x\cdot\cos(kx)\,dx$$

$$= \pi\cdot\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^{2\pi} - \frac{x\cdot\sin(kx)}{k}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\cdot\int_0^{2\pi}\sin(kx)\,dx$$

$$= -\frac{1}{k}\cdot-\frac{\cos(kx)}{k}\Big|_0^{2\pi}$$

$$\pi\cdot a_k = -\frac{1}{k}\cdot\left(-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi} (\pi - x)\cdot\sin(kx)\,dx$$

$$\pi\cdot b_k = \pi\cdot\int_0^{2\pi} \sin(kx)\,dx - \int_0^{2\pi} x\cdot\sin(kx)\,dx$$

$$= -\frac{\pi\cdot\cos(kx)}{k}\Big|_0^{2\pi} + \frac{x\cdot\cos(kx)}{k}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\cdot\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{2\pi}{k} + \frac{1}{k}\cdot\frac{\sin(kx)}{k}\Big|_0^{2\pi}$$

$$\pi\cdot b_k = \frac{2\pi}{k}$$

$$b_k = \frac{2}{k}$$

Fourier-Reihe von f :

$$2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}$$

3) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $\left[0,2\pi\right[$ durch $f\left(x\right)=x^2$ definiert und 2π - periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Berechnen Sie die Fourier Reihe von f .

Weil die Funktion im beschriebenen Intervall weder gerade noch ungerade ist, müssen alle Fourier-Koeffizienten berechnet werden.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2\pi}=\frac{8\pi^3}{3\pi}=\frac{8\pi^2}{3}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}x^2\cdot\cos\left(kx\right)dx$$

$$\pi\cdot a_k=\left.\frac{x^2\cdot\sin\left(kx\right)}{k}\right|_0^{2\pi}-\frac{2}{k}\cdot\int_0^{2\pi}x\cdot\sin\left(kx\right)dx$$

$$=-\frac{2}{k}\cdot\left(-\left.\frac{x\cdot\cos\left(kx\right)}{k}\right|_0^{2\pi}+\frac{1}{k}\cdot\int_0^{2\pi}\cos\left(kx\right)dx\right)$$

$$=-\frac{2}{k}\cdot\left(-\frac{2\pi}{k}+\frac{1}{k}\cdot\left.\frac{\sin\left(kx\right)}{k}\right|_0^{2\pi}\right)$$

$$\pi\cdot a_k=\frac{4\pi}{k^2}\to a_k=\frac{4}{k^2}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}x^2\cdot\sin\left(kx\right)dx$$

$$\pi\cdot b_k=-\left.\frac{x^2\cdot\cos\left(kx\right)}{k}\right|_0^{2\pi}+\frac{2}{k}\cdot\int_0^{2\pi}x\cdot\cos\left(kx\right)dx$$

$$=-\frac{4\pi^2}{k}+\frac{2}{k}\cdot\left(\left.\frac{x\cdot\sin\left(kx\right)}{k}\right|_0^{2\pi}-\frac{1}{k}\cdot\int_0^{2\pi}\sin\left(kx\right)dx\right)$$

$$=-\frac{4\pi^2}{k}-\frac{2}{k^2}\cdot\left(\left.\frac{\cos\left(kx\right)}{k}\right|_0^{2\pi}\right)$$

$$=-\frac{4\pi^2}{k}-\frac{2}{k^2}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\right)$$

$$\pi\cdot b_k=-\frac{4\pi^2}{k}\to b_k=-\frac{4\pi}{k}$$

Fourier-Reihe von f :

$$\frac{8\pi^2}{6}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4\cdot\cos\left(kx\right)}{k^2}-\frac{4\pi\cdot\sin\left(kx\right)}{k}$$

4) Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei auf dem Intervall $[-\pi,\pi[$ durch $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ definiert und 2π -periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Berechnen Sie die Fourier Reihe von f .

(Hinweis: $\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$)

Der Sinus ist eine ungerade Funktion, daher entfällt die Berechnung von a_k . a_0 kann als 0 angenommen werden, weil die Funktion keinen Offset hat, d.h. die Symmetrie zum Nullpunkt hin vorliegt. Der Vollständigkeit halber wird es hier in der Lösung aber berechnet.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)dx=-\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\sin(kx)\,dx$$

$$\pi\cdot b_k=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{x-2kx}{2}\right)-\cos\left(\frac{x+2kx}{2}\right)\right)dx$$

$$2\pi\cdot b_k=\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x\cdot(1-2k)}{2}\right)dx-\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{x\cdot(1+2k)}{2}\right)dx$$

$$=\frac{2\cdot\sin\left(\frac{x\cdot(1-2k)}{2}\right)}{1-2k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2\cdot\sin\left(\frac{x\cdot(1+2k)}{2}\right)}{1+2k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\left(\frac{2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-k\pi\right)}{1-2k}-\frac{2\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{1-2k}\right)-\left(\frac{2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{1+2k}-\frac{2\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}-k\pi\right)}{1+2k}\right)$$

$$=\left(\frac{2\cdot\cos(-k\pi)}{1-2k}+\frac{2\cdot\cos(k\pi)}{1-2k}\right)-\left(\frac{2\cdot\cos(k\pi)}{1+2k}+\frac{2\cdot\cos(-k\pi)}{1+2k}\right)$$

$$=\frac{4\cdot\cos(k\pi)}{1-2k}-\frac{4\cdot\cos(k\pi)}{1+2k}$$

$$=\frac{4\cdot(-1)^k+8k\cdot(-1)^k}{(1-2k)\cdot(1+2k)}-\frac{4\cdot(-1)^k-8k\cdot(-1)^k}{(1+2k)\cdot(1-2k)}$$

$$2\pi\cdot b_k=\frac{16k\cdot(-1)^k}{1-4k^2}\to b_k=\frac{8k\cdot(-1)^k}{\pi\cdot\left(1-4k^2\right)}$$

Fourier-Reihe von f :

$$\frac{8}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot(-1)^k}{1-4k^2}\cdot\sin(kx)$$