Tutorium Mathe 2 MT

Aufgabenblatt: Fourier Transformationen (Teil 2) (+ Lösungen)

1) Berechnen Sie die Fourier Transformierte der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(t)=\begin{cases} e^{-5t},\ falls -3\le t<0 \\ e^{-3t},\ falls\ 0\le t<5 \\ 0,\ sonst \end{cases}$$

Lösung:

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\int_{-3}^{0}e^{-5t}\cdot e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{5}e^{-3t}\cdot e^{-i\omega t}dt\right)$$

$$2\pi\cdot\hat{f}(\omega)=\int_{-3}^{0}e^{t(-5-i\omega)}dt+\int_{0}^{5}e^{t(-3-i\omega)}dt$$

$$=-\left.\frac{e^{(-5-i\omega)t}}{5+i\omega}\right|_{-3}^{0}-\left.\frac{e^{(-3-i\omega)t}}{3+i\omega}\right|_{0}^{5}$$

Damit man das Ergebis als Realteil und Imaginärteil schreiben kann, müssen die imaginären Einheiten in den Nennern der Brüche verschwinden. Dies wird durch konjugiert komplexes Erweitern erreicht.

$$=-\frac{5-i\omega}{25+\omega^2}\left(1-e^{15+3i\omega}\right)-\frac{3-i\omega}{9+\omega^2}\left(e^{-15-5i\omega}-1\right)$$

$$=\frac{i\omega-5}{25+\omega^2}\left(1-e^{15}\cdot\left(\cos(3\omega)+i\sin(3\omega)\right)\right)$$

$$+\frac{i\omega-3}{9+\omega^2}\left(e^{-15}\cdot\left(\cos(5\omega)-i\sin(5\omega)\right)-1\right)$$

$$=\frac{i\omega-5\cdot\left(1-e^{15}\cdot\cos(3\omega)-e^{15}\cdot i\sin(3\omega)\right)}{25+\omega^2}$$

$$+\frac{i\omega-3\cdot\left(e^{-15}\cdot\cos(5\omega)-i\sin(5\omega)-1\right)}{9+\omega^2}$$

$$=\frac{i\omega-i\omega\cdot e^{15}\cdot\cos(3\omega)+e^{15}\cdot\omega^2\cdot\sin(3\omega)}{25+\omega^2}+\frac{-5+5\cdot e^{15}\cdot\cos(3\omega)+5\cdot e^{15}\cdot i\sin(3\omega)}{25+\omega^2}$$

$$+\frac{i\omega\cdot e^{-15}\cdot\cos(5\omega)+\omega\cdot\sin(5\omega)-i\omega}{9+\omega^2}+\frac{-3\cdot e^{-15}\cdot\cos(5\omega)+3i\sin(5\omega)+3}{9+\omega^2}$$

Die Bruchsummanden werden nun nach Realteil und Imaginärteil getrennt. Der Übersicht halber sind die Multiplikationszeichen weggelassen worden.

$$=\left(\frac{5\left(e^{15}\cos(3\omega)-1\right)+e^{15}\omega^2\sin(3\omega)}{25+\omega^2}+\frac{3\left(1-e^{-15}\cos(5\omega)\right)+e^{-15}\omega\sin(5\omega)}{9+\omega^2}\right)$$
$$+i\left(\frac{\omega\left(1-e^{15}\cos(3\omega)\right)+5e^{15}\sin(3\omega)}{25+\omega^2}+\frac{\omega\left(e^{-15}\cos(5\omega)-1\right)+3e^{-15}\sin(5\omega)}{9+\omega^2}\right)$$

Zum Schluss müssen nun noch die 2π verrechnet werden, welche am Anfang auf die linke Seite gezogen worden sind, um die Rechnung zu vereinfachen.

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{5\left(e^{15}\cos(3\omega)-1\right)+e^{15}\omega^2\sin(3\omega)}{25+\omega^2}+\frac{3\left(1-e^{-15}\cos(5\omega)\right)+e^{-15}\omega\sin(5\omega)}{9+\omega^2}\right)$$
$$+\frac{i}{2\pi}\left(\frac{\omega\left(1-e^{15}\cos(3\omega)\right)+5e^{15}\sin(3\omega)}{25+\omega^2}+\frac{\omega\left(e^{-15}\cos(5\omega)-1\right)+3e^{-15}\sin(5\omega)}{9+\omega^2}\right)$$

2) Berechnen Sie die Fourier Transformierte der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(t)=e^{-|t|}$

(Hinweis: $\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cdot\cos(bx)+b\cdot\sin(bx)+C\right)$)

Lösung:

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\int_{-\infty}^{0}e^{t}\cdot e^{-i\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t}\cdot e^{-i\omega t}dt\right)$$
$$2\pi\cdot\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{0}e^{t(1-i\omega t)}dt+\int_{0}^{\infty}e^{t(-1-i\omega t)}dt$$
$$=\left.\frac{e^{t(1-i\omega t)}}{1-i\omega}\right|_{-\infty}^{0}-\left.\frac{e^{t(-1-i\omega t)}}{1+i\omega}\right|_{0}^{\infty}$$
$$=\frac{1}{1-i\omega}+\frac{1}{1+i\omega}$$
$$2\pi\cdot\hat{f}(\omega)=\frac{(1-i\omega)+(1+i\omega)}{1+\omega^2}=\frac{2}{1+\omega^2}$$
$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi\cdot\left(1+\omega^2\right)}$$

3) Berechnen Sie die Fourier Transformierte der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(t)=\begin{cases} 0,\ falls\ t<0 \\ 2t,\ falls\ 0\le t\le 1 \\ 0,\ falls\ t>1 \end{cases}$$

Lösung:

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_0^1 2t\cdot e^{-i\omega t}dt$$

$$2\pi\cdot\hat{f}(\omega)=\left.\frac{i\cdot 2t\cdot e^{-i\omega t}}{\omega}\right|_0^1-\frac{2i}{\omega}\int_0^1 e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{2i\cdot e^{-i\omega}}{\omega}-\frac{2i}{\omega}\cdot\left.\frac{i\cdot e^{-i\omega t}}{\omega}\right|_0^1$$

$$=\frac{2i\cdot e^{-i\omega}}{\omega}+\frac{2e^{-i\omega}-2}{\omega^2}$$

$$=\frac{2i\cdot\left(\cos(\omega)-i\sin(\omega)\right)}{\omega}+\frac{2\cdot\left(\cos(\omega)-i\sin(\omega)\right)}{\omega^2}-\frac{2}{\omega^2}$$

$$=\frac{2\cdot\cos(\omega)}{\omega^2}+\frac{2\cdot\sin(\omega)}{\omega}-\frac{2}{\omega^2}+i\cdot\left(\frac{2\cdot\cos(\omega)}{\omega}-\frac{2\cdot\sin(\omega)}{\omega^2}\right)$$