Mathe 1 Tutorium MS

Lineare Algebra: Inverse Matrix

Die Matrizeninverse basiert auf der Gleichung $A \cdot X = E$. Löst man diese und erhält man eine Matrix X als Lösung, ist dies die inverse Matrix von A.
Wichtig zu beachten sind die folgenden Bemerkungen:

- Eine quadratische Matrix besitzt entweder genau eine oder keine Inverse
- Es gilt das Kommutativgesetz: $A \cdot A^{-1} = E \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A = E$

Um zu prüfen, ob eine quadratische Matrix invertierbar ist, nutzt man die Determinante bzw. prüft, ob es sich um eine reguläre Matrix handelt.

➔ Ist A eine reguläre Matrix $(\det \neq 0)$, ist A umkehrbar und besitzt genau eine Inverse.
Ist A eine singuläre Matrix, ist A nicht umkehrbar.

Zur Berechnung der inverse gibt es zwei Verfahren, die nach unterschiedlichen Prinzipien funktionieren:

1. Berechnung der inversen Matrix A^{-1} unter Verwendung von Unterdeterminanten

   In diesem Verfahren arbeitet man mit dem algebraischen Komplement der Matrizenelemente. Zur Berechnung nutzt man Unterdeterminanten der gegebenen Matrix.

   $A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot D_{ik}$ Algebraisches Komplement des Matrizenelements in der k-ten Zeile und in der i-ten Spalte

   D_{ik} Unterdeterminante von $\det(A)$, zur Berechnung streicht man die k-te Zeile und die i-te Spalte

   Um die inverse Matrix zu Berechnen, muss man nach Berechnung aller algebraischen Komplemente noch mit dem Kehrwert der Determinante von A multiplizieren.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

   WICHTIG:
   Zeilen und Spalten werden bei der Berechnung vertauscht, d.h. in der 1.Zeile und 3.Spalte findet man das algebraische Komplement des Matrizenelementes aus der 3.Zeile und der 1.Spalte!!

Berechnungsbeispiel:
Gesucht ist die inverse Matrix der quadratischen regulären Matrix

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=-1$$

Es werden nun, oben links begonnen, die Unterdeterminanten und entsprechend der Regel das algebraische Komplement zu berechnen.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+1}=-1\cdot 1=-1$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2}=1\cdot -1=-1$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+3}=4\cdot 1=4$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+1}=2\cdot -1=-2$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+2}=-2\cdot 1=-2$$

$$A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{2+3}=-7\cdot -1=7$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+1}=0\cdot 1=0$$

$$A_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+2}=1\cdot -1=-1$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 4 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+3}=4\cdot 1=4$$

Bei dieser Darstellung sind die Indizes bereits so gedreht, dass man sie nun direkt in die Formel einsetzen kann:

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Berechnung der inversen Matrix mit dem Gauss-Jordan-Verfahren

Bei diesem Verfahren nutzt man die elementaren Umformungen des Gauss-Verfahrens zur Lösung von LGS, um die inverse Matrix zu berechnen.

Man stellt folgende Matrix aus der Matrix A und der Einheitsmatrix auf:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Als nächstes formt man mit Hilfe der elementaren Umformungsschritte, die bei den LGS verwendet werden, die Matrix so um, das die Einheitsmatrix auf der linken Seite steht. Auf der rechten steht dann die inverse Matrix A^{-1}.

$$(E\,|\,A^{-1})=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Berechnungsbeispiel:
Dazu wird dieselbe Matrix A aus dem ersten Beispiel verwendet, um einen direkten Vergleich möglich zu machen.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A)=-1$$

Einsetzen in die Formel und Umformen wie bei LGS:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ IIa=II+8\cdot I \\ IIIa=III+2\cdot I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) IIIa\text{ und } IIa\text{ tauschen}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ IIIb=IIIa-4\cdot IIa \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)\begin{array}{l} Ia=I+III \\ IIb=IIa+2\cdot IIIb \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)=(E\,|\,A^{-1})$$