Mathe 1 Tutorium MS

Lösungswege der Probeklausur für MS 1

Aufgabe 1:
Berechnung der Umkehrfunktion:

$$y=\frac{3}{\sqrt{x-5}} \quad |:3$$
$$\frac{y}{3}=\frac{1}{\sqrt{x-5}} \quad |\,Kehrwert\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{3}{y}=\sqrt{x-5} \quad |(\ )^2$$
$$\frac{9}{y^2}=x-5 \quad |+5$$
$$\frac{9}{y^2}+5=x=f^{-1}(y)$$

Definitions- /Wertebereich von $f^{-1}(y)$:

$$D\left(f^{-1}\right)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$W\left(f^{-1}\right)=D(f)=\mathbb{R}\setminus\{5\}$$

Aufgabe 2:
Berechnung der Nullstellen → Wann wird der Zähler null?

$$x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm 1$$

Berechnung der Polstellen → Wann wird der Nenner null?

$$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$$

Polynomdivision zur Zerlegung:

$$\left(x^2-1\right):(x+3)=x-3+\frac{8}{(x+3)}$$
$$\underline{-\left(x^2+3x\right)}$$
$$-3x-1$$
$$\underline{-(-3x-9)}$$
$$8$$

Aufgabe 3:

Prüfen von $x_0 = 0$:

Linksseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = 0$, rechtsseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = 1$,

Funktionswert $f(0) = 0$

➔ Die Funktion hat eine Sprungstelle bei $x_0 = 0$, ist also nicht stetig.

Prüfen von $x_1 = 1$:

Linksseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_1^-} f(x) = 2$, rechtsseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_1^+} f(x) = 2$,

Funktionswert $f(1) = 2$

➔ An der Stelle $x_1 = 1$ ist die Funktion stetig.

Aufgabe 4:

Die Gleichung wird wie folgt vereinfacht:

$$2 \cdot \sin^2(x) = \sin(x) + 1 \quad \left| SUB: t = \sin(x) \right.$$

$$2 \cdot t^2 = t + 1$$

$$t^2 - \frac{1}{2} \cdot t - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

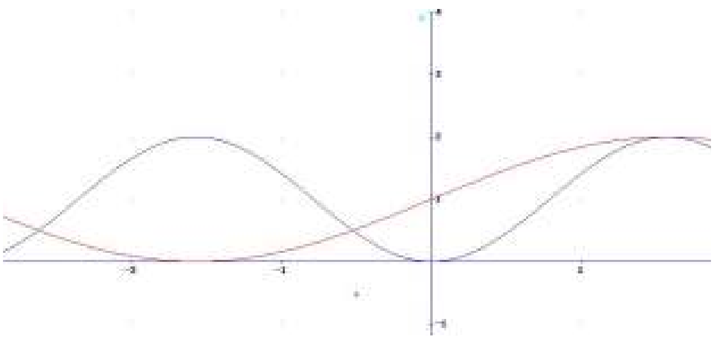
$$\Rightarrow x_1 = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x_2 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Die ersten beiden Lösungen lauten:

$$\left\{-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right\}$$

Die dritte Lösung ergibt sich auch Symmetriegründen. Am besten nimmt man hier eine Skizze zur Hilfe:



Dadurch das der quadrierte Sinus durch Multiplikation die halbe Periodendauer hat, schneidet der um 1 vergrößerte Sinus die Kurve auf der linken Seite doppelt, allerdings im gleichen Abstand zur Extremstelle bzw. zu den Nullstellen von Sinus+1.

Die dritte Lösung ist daher:

$$x_3 = -\pi + x_2 = -\frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$$x_3 = -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

Die Lösungsmenge ergibt sich damit zu:

$$L = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\}$$

Aufgabe 5:

Lösung für $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) Zeile\ I\ wird\ mit\ III\ getauscht$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ IIa = 2 \cdot II - I \\ \\ IVa = IV - III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ IIIa = 2 \cdot III + I \\ \quad \Rightarrow z = 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x + 5 \cdot 0 = 3 \Leftrightarrow x = 3$$

$$aus\ IIa\ folgt:$$

$$3x - 6y - z = 1 \Leftrightarrow 9 - 6y = 1 \Leftrightarrow -6y = -8 \Leftrightarrow y = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$aus\ I\ folgt:$$

$$-2u + x + 4y - z = 1 \Leftrightarrow -2u = -2 - \frac{16}{3} \Leftrightarrow 2u = \frac{22}{3} \Leftrightarrow u = \frac{11}{3}$$

Prüfen der Lösbarkeit:

Zunächst berechnet man, mit Hilfe des Entwicklungssatzes die Determinante der Koeffizientenmatrix, um ihren Rang zu finden. Dieser ist, wenn das System wie gezeigt 0-dimensional lösbar ist gleich 4,denn 0-dimensionale Lösung bedeutet, das $Rg(A) = Rg(A|\vec{b}) = Anzahl\ der\ Zeilen\ des\ Systems$ sein muss.

Ist der Rang gleich der Anzahl der Zeilen, muss die Determinante der Koeffizienten- und der Systemmatrix ungleich null sein. Durch den Wert a kann der Wert dieser Determinanten beeinflusst werden. In unserem Fall möchten wir erreichen, dass die Determinante null wird, denn nur dann kann das System unlösbar oder mehr als 0-dimensional lösbar werden.

Gesucht ist also ein a, sodass $\det(A)=0$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -a & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & a \end{pmatrix} = 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -a & -1 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot(4a+2+12-12-2-4a)-(-a^2+2+6+3a-2-2a)$$

$$= a^2-a-6$$

Die Determinante wird nun nach a gelöst:

$$a^2-a-6=0$$

$$\Rightarrow a_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow a_1=3, a_2=-2$$

Die für die folgenden Untersuchungen interessanten Werte sind $a_1=3$ und $a_2=-2$.

Nun wird die Determinante des Systems untersucht, denn hier entscheidet sich im Rang, ob das System unlösbar ist oder einen 1-dimensionalen Lösungsraum hat.

$$\det\left(A\,|\,\vec{b}\right)=\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -a & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a & 1 \end{pmatrix} = -2\cdot\det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & a & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -a & -1 & 1 \\ -2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2\cdot(2-6+4a-2+2a-12)+(2-6-a^2-2+2a+3a)$$

$$= -12a+36-a^2+5a-6$$

$$= -a^2-7a+30$$

Für $Rg(A) > Rg\left(A\,|\,\vec{b}\right)$ gibt es keine Lösung. Daraus kann man schließen, dass jener Wert keine Lösung für a in der Matrix $\left(A\,|\,\vec{b}\right)$ sein kann. Der Rang von A wird für $a_1=3$ und $a_2=-2$ kleiner 4. Ist einer dieser Werte nicht Lösung für a in der Matrix $\left(A\,|\,\vec{b}\right)$, so ist das System für dieses a nicht lösbar.

$-a^2 - 7a + 30 = 0$

$\Rightarrow a_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{120}{4}} = -\frac{7}{2} \pm \frac{13}{2}$

$\Rightarrow a_1 = -10, a_2 = 3$

Der Wert $a = -2$ taucht hier nicht als Lösung auf, daher ist das System für $a = -2$ nicht lösbar.
Der andere Wert $a = 3$ weisst darauf hin, dass für jenen Wert die Ränge beider Matrizen kleiner als 4 sind, es also in diesem Fall, sollte eine Lösung vorliegen, eine mehr als 0-dimensionale Lösung gibt.
Der Wert $a = -10$ wäre genauso richtig, in dem Fall müsste man noch nicht mal weitere Untersuchungen durchführen, weil der Rang der Koeffizientenmatrix ohnehin schon größer wäre.
Um zu zeigen, dass der Rang des Systems bei $a = 3$ auch gleich drei ist, muss man die Unterdeterminanten der Koeffizienten und Systemmatrix betrachten:

$$\det\left(A_U\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \left(0+2+24+9-0-4\right) = 31 \neq 0$$

$$\Rightarrow Rg\left(A\right) = 3$$

$$\det\left(A \mid \vec{b}_U\right) = \det\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \left(24+0+2-0-4+9\right) = 31 \neq 0$$

$$\Rightarrow Rg\left(A \mid \vec{b}\right) = 3$$

Damit ist gezeigt, dass für $a = 3$ ein 1-dimensionaler Lösungsraum herauskommt.
Das Lösen des Systems für $a = 3$ bestätigt dies:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) Zeile\ I\ wird\ mit\ III\ getauscht$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) IVa = IV - III$$

$$\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ IIa = II - 2\cdot I \\ IIIa = III + I \\ \Rightarrow z = t \end{array}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 10 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & 2 & 2 \end{array}\right) IIIb = 3\cdot III + 2\cdot II$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 10 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow y = \frac{4-8t}{5}$$

aus IIa folgt :

$$-3x + 10\cdot\left(\frac{4-8t}{5}\right) + t = -1 \Leftrightarrow -3x = -9 + 15t \Leftrightarrow x = 3 - 5t$$

aus I folgt :

$$-u + 2\cdot(3-5t) - 3\cdot\left(\frac{4-8t}{5}\right) - t = 1 \Leftrightarrow -u = -\frac{30}{5} + \frac{12}{5} + \frac{5}{5} + \frac{50}{5}t - \frac{24}{5}t + \frac{5}{5}t$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{13}{5} - \frac{31}{5}t$$

Aufgabe 6:

a) Die Dimension des Ergebnisses ist gleich Zeilenzahl der ersten Matrix mal Spaltenzahl der zweiten Matrix, also 3x3

b)

$$\begin{array}{cc|ccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 2 & (1+8) & (2+10) & (3+12) \\ 3 & 4 & (3+16) & (6+20) & (9+24) \\ 5 & 6 & (5+24) & (10+30) & (15+36) \end{array}$$

Ergebnis :

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$$