Mathe 1 Tutorium MS

Probeklausur für Mathe 1 (Media Systems, WS09/10)

Hinweise zur Bearbeitung

Die Aufgaben sind auf den vorgegebenen Aufgabenzetteln zu bearbeiten. Für Nebenrechnungen dürfen separate Zettel genutzt werden. Gewertet wird allerdings nur, was auf den Aufgabenzetteln berechnet worden ist. Sollte der Platz unter den Aufgaben nicht ausreichen, kann auf weiteren Zetteln, die vorne ausliegen, weitergerechnet werden. Als Lösung gelten grundsätzlich der Lösungsweg inklusive aller wichtigen Zwischenschritte und das Endergebnis.

WICHTIG!!
Auch ein falsches Endergebnis kann bei kleinen Fehlern in der Rechnung zu voller Punktzahl führen. Dazu muss allerdings der Rechenweg zum Ergebnis korrekt sein!

Hilfsmittel

Als Hilfsmittel kann ein einfacher, nicht programmierbarer, wissenschaftlicher Taschenrechner sowie eine selbst geschriebene Formelsammlung auf einer DIN-A4 Seite (beidseitig beschrieben) verwendet werden. Grafikrechner und Computer-Algebra-Systeme sind verboten.

Bearbeitungszeit

Pro Aufgabe sind etwa 20 Minuten Bearbeitungszeit vorgesehen.

Aufgabe 1: Funktionen und ihre Eigenschaften (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion dritten Grades $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$. Diese soll im Folgenden untersucht werden. Bearbeiten Sie dazu die Aufgaben:

a) Prüfen Sie die Funktion auf Symmetrieeigenschaften.
b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von f.
c) Bestimmen Sie die reellen Nullstellen der Funktion.
d) Bestimmen Sie die Asymptoten für $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim_{x \to \infty} f(x)$.
e) Zeichnen Sie eine Skizze des Graphen von f im Intervall $[-1, 3]$.
f) Ordnen Sie den folgenden Intervallen mit Hilfe der Skizze aus Aufgabenteil e) jeweils die Monotonieverhalten der Funktion zu:
   - $(-\infty; 0{,}11]$
   - $[0{,}11; 1{,}56]$
   - $[1{,}56; \infty)$

Lösung:

a) Die Funktion besitzt im Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Potenzen von x. Daher ist diese Funktion weder gerade noch ungerade, besitzt also keine Symmetrieeigenschaften.

b) Da anhand des Funktionsterms keine Definitionslücken zu finden sind (z.B. durch Brüche, deren Nenner null wird), gilt für den Definitionsbereich:
$D(f) = \mathbb{R}$

c) Um die Nullstellen zu berechnen, muss man zunächst per Polynomdivision oder Horner Schema die Funktion um einen Grad reduzieren, damit man sie mit Hilfe der p,q-Formel weiter lösen kann. Dazu sucht man zunächst durch Probieren eine Nullstelle der Funktion.

Durch Probieren ergibt sich z.B. $x_1 = 1$. Durch Polynomdivision mit dem zugehörigen Linearfaktor $(x-1)$ erhält man ein Polynom zweiten Grades, welches die beiden verbleibenden Nullstellen enthält, sofern diese vorhanden sind.

$$\left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) : (x-1) = x^2 - \frac{3}{2}x - 1$$
$$\underline{-(x^3 - x^2)}$$
$$-\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$
$$\underline{-\left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right)}$$
$$-x + 1$$
$$\underline{-(-x+1)}$$
$$0$$

Das Ergebnis wird nun mit Hilfe der p,q-Formel gelöst:

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$\rightarrow x_{2,3} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 2$$

Die Nullstellen der Funktion f liegen bei $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$ und $x_3 = 2$.

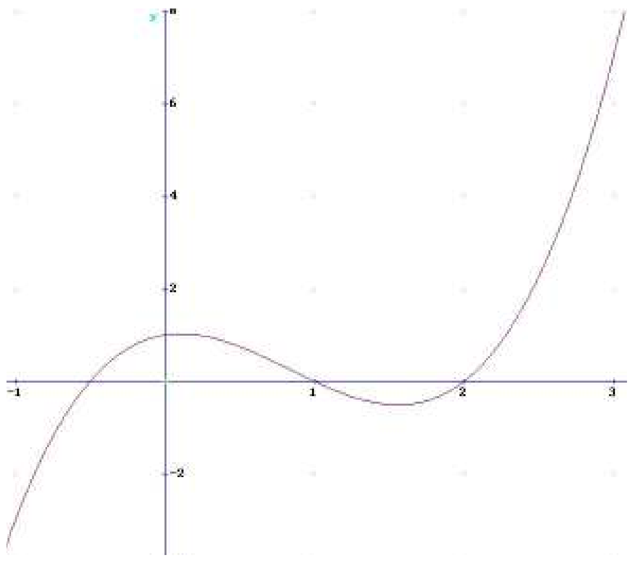
d) Jene Asymptoten können anhand der Funktionsgleichung ermittelt werden, indem man einen möglichst kleinen und einen möglichst großen Wert einsetzt. Es ergibt sich:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

e) Dazu erstellt man am besten eine Wertetabelle, um den ungefähren Verlauf der Funktion bestimmen zu können. Man erhält dann ein Bild, welches ungefähr dem gezeigten Funktionsgraphen entsprechen sollte.

x	-1	0	1	1,5	2	3
f(x)	-3	1	0	-0,5	0	7



f) Mit Hilfe der Skizze ordnet man wie folgt die Eigenschaften den Intervallen zu:

- $(-\infty; 0{,}11] \rightarrow \textit{streng monoton steigend}$
- $[0{,}11; 1{,}56] \rightarrow \textit{streng monoton fallend}$
- $[1{,}56; \infty) \rightarrow \textit{streng monoton steigend}$

Aufgabe 2: Interpolation und Funktionseigenschaften (12 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 4$ sowie die Punkte $P_1(-1,4)$, $P_2(0,2)$ und $P_3(1,-1)$.

a) Bestimmen Sie eine quadratische Funktion $g(x)$, welche durch P_1, P_2 und P_3 verläuft. Machen Sie anschließend die Probe, um ihr Ergebnis zu kontrollieren.
b) Berechnen Sie den Scheitelpunkt von $g(x)$.
c) Berechnen Sie die Nullstellen von $g(x)$.
d) Bestimmen Sie jene x-Werte, für die $f(x) = g(x)$ gilt.
e) Skizzieren Sie die Funktionen f und g im Intervall $[-3,2]$.

Lösung:

a) Um eine Funktion mit den gegebenen Eigenschaften zu ermitteln, setzt man mit einem LGS an, welches die drei Informationen auf eine quadratische Funktion bezieht.

$$Stammform: ax^2 + bx + c$$

$$\begin{aligned} a - b + c &= 4 \\ c &= 2 \\ a + b + c &= -1 \end{aligned}$$

Dieses LGS löst man nach a, b und c. Dies geht in diesem Fall am schnellsten mit dem Einsetzungsverfahren. Da c bereits ermittelt ist, setzt man den Wert in die restlichen Gleichungen direkt ein:

$$a - b = 2$$
$$a + b = -3 \Leftrightarrow b = -a - 3$$

$$a - (-a - 3) = 2 \Leftrightarrow 2a + 3 = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$
$$b = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

Damit erhält man für die Funktion $g(x)$:

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2$$

Probe:

$$g(-1) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + 2 = 4$$
$$g(0) = 2$$
$$g(1) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 = -1$$

b) Um den Scheitelpunkt zu bestimmen, formt man mit binomischer Ergänzung um. Dabei ist wichtig, dass man das Minuszeichen aus der Gleichung ausklammert, ansonsten wäre die Umformung nicht möglich.

$$-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-2\right)=0$$

Zunächst kann man aus den ersten beiden Summanden die Werte innerhalb der Klammer der binomischen Formel bestimmen, die zur Vereinfachung genutzt wird. Danach wird dann durch Ergänzung der letzte Summand so modelliert, dass nach der Formel umgeformt werden kann.

$$a=\sqrt{\frac{1}{2}x^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$$2b=\frac{\frac{5}{2}x}{\frac{1}{\sqrt{2}}x}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}\Rightarrow b=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{4}\Rightarrow b^2=\left(\frac{\sqrt{50}}{4}\right)^2=\frac{25}{8}$$

$$-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{16}{8}+\frac{41}{8}\right)=\frac{41}{8}$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{5\cdot\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{41}{8}$$

Die Klammer muss, damit der Scheitelpunkt erreicht ist, null werden. Man erhält:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{5\cdot\sqrt{2}}{4}=0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x=-\frac{5\cdot\sqrt{2}}{4}$$

$$x=-\frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{4}=-\frac{5}{2}$$

Der Funktionswert $y=\frac{41}{8}$ ergibt sich bereits aus der oberen Gleichung. Der Scheitelpunkt von $g(x)$ liegt also am Punkt $P_S=\left(-\frac{5}{2},\frac{41}{8}\right)$.

c) Die Nullstellen werden mit der p-q-Formel berechnet.

$$-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+2=0 \qquad |\cdot(-2)$$

$$x^2+5x-4=0$$

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{16}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{41}{4}}$$
$$x_1 = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{41}{4}},\ x_2 = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{41}{4}}$$

d) Um die gemeinsamen Werte der Funktionen f und g zu bestimmen, setzt man die Funktionsterme gleich und löst nach x auf.

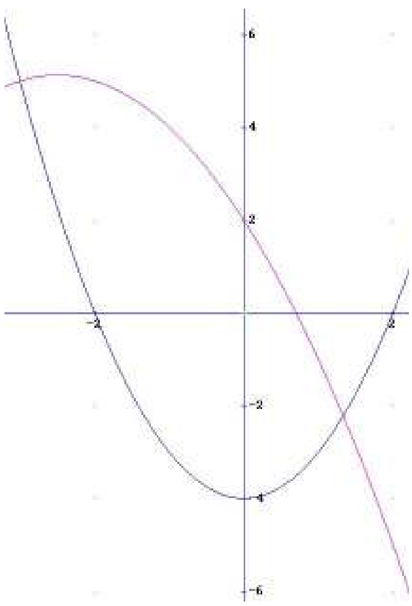
$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 2 = x^2 - 4$$
$$-\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 6 = 0$$
$$x^2 + \frac{5}{3}x - 4 = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{144}{36}} = -\frac{5}{6} \pm \frac{13}{6}$$
$$x_1 = -3,\ x_2 = \frac{4}{3}$$

Die Funktionen f und g haben an den Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = \frac{4}{3}$ denselben Funktionswert.

e) Auch hier fertigt man zunächst eine Wertetabelle an:

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	5	4	2	-1	-5
$g(x)$	5	0	-3	-4	-3	0

Man erhält eine Skizze, die ähnlich der folgenden Darstellung aussieht.



Aufgabe 3: **Lineare Algebra und LGS (11 Punkte)**

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

sowie die Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Multiplizieren Sie die Matrix A mit der Matrix B. Bestimmen Sie außerdem die Determinanten von A, B und $C = A \cdot B$.
b) Multiplizieren Sie die Matrix C mit dem Vektor $\vec{b}$. Berechnen Sie die Länge des Ergebnisvektors.
c) Der Vektor $\vec{c}$ bilde mit der Matrix C ein LGS. Prüfen Sie dieses LGS auf Lösbarkeit und bestimmen Sie ggf. die Lösung.
d) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{d}$, der senkrecht auf $\vec{b}$ und $\vec{c}$ steht. Veranschaulichen Sie das Ergebnis mit einer Skizze der Vektoren im Koordinatensystem.

Lösung:

a) Durch Multiplizieren der Matrizen ergibt sich die Matrix C.

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 6 & -8 & -4 \\ 5 & -1 & 20 \end{pmatrix}$$

Für die Determinanten erhält man:

$$\det(A) = 12 + 4 + 8 + 1 = 25$$

$$\det(B) = 16 + 8 + 8 = 32$$

$$\det(C) = 640 + 40 + 24 - 160 + 16 + 240 = 800$$

$$\rightarrow \textit{alternativ}: \det(C) = \det(A) \cdot \det(B) = 25 \cdot 32 = 800$$

b)

$$C \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 6 & -8 & -4 \\ 5 & -1 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -6 \\ 65 \end{pmatrix}$$

$$\left| C \cdot \vec{b} \right| = \sqrt{(-16)^2 + (-6)^2 + 65^2} = \sqrt{4517} \approx 67{,}2$$

c) Das LGS hat die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & -4 & 2 \\ 6 & -8 & -4 & -1 \\ 5 & -1 & 20 & 1 \end{array}\right)$$

Zunächst prüft man es mit Hilfe von Determinanten auf Lösbarkeit.

$$\det(C) = 800$$

$$\Rightarrow Rg(C) = 3$$

$$\det(C \mid \vec{c}) = 800 (= \det(C))$$

$$\Rightarrow Rg(C) = 3$$

Das LGS ist also lösbar und hat einen 0-dimensionalen Lösungsraum (Punkt/Ortsvektor). Die Lösung kann z.B. mit Hilfe der Cramer'schen Regel ermittelt werden, welche auf Determinanten basiert. Als Variablen werden x, y und z verwendet (beliebig veränderbar).

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & -8 & -4 \\ 1 & -1 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 6 & -8 & -4 \\ 5 & -1 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{-396}{800} = -\frac{99}{200}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 6 & -1 & -4 \\ 5 & 1 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 6 & -8 & -4 \\ 5 & -1 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{-260}{800} = -\frac{13}{40}$$

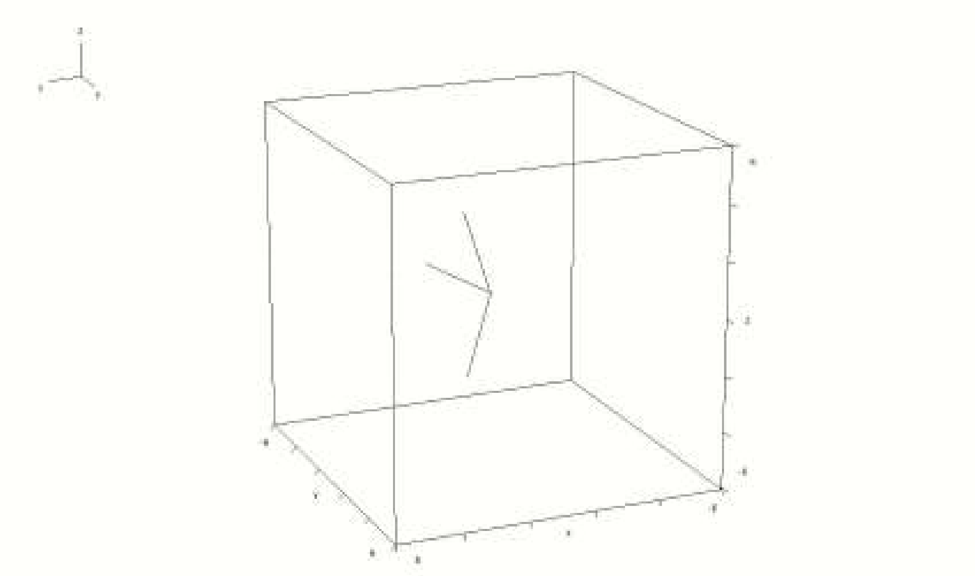
$$z = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & -8 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 6 & -8 & -4 \\ 5 & -1 & 20 \end{vmatrix}} = \frac{126}{800} = \frac{63}{400}$$

Die Lösungen des LGS lauten also $x = -\frac{99}{200}$, $y = -\frac{13}{40}$ und $z = \frac{63}{400}$.

d) Sind zwei Vektoren gegeben und möchte man einen Normalenvektor bestimmen, geht dies am schnellsten mit dem Vektorprodukt.

$$\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+3\\6-1\\-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}=\vec{d}$$

Eine Skizze der Vektoren in einem 3D-System sollte der folgenden Ansicht ähnlich sehen:



Hier geht es allerdings nicht um Präzision, sondern darum, dass man sich die Situation, dass der Vektor $\vec{d}$ senkrecht auf $\vec{b}$ und $\vec{c}$ steht einigermaßen verdeutlichen kann.

Aufgabe 4: Komplexe Zahlen und LGS (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden komplexen LGS:

$$(2-i2)\cdot \underline{x}+(4+i)\cdot \underline{y}=-5-i8$$
$$(1+i3)\cdot \underline{x}+(2-i6)\cdot \underline{y}=20+i4$$

Schreiben Sie die Lösungen für $\underline{x}$ und $\underline{y}$ jeweils in Trigonometrischer Form und Exponentialform auf.

Lösung:
Auch hier wird mit der Cramerschen Regel angesetzt, weil jene auch für komplexe Systeme gilt. Da ein quadratisches System vorliegt, ist diese Methode oft von Vorteil. Natürlich führen auch alle anderen Verfahren zum Ziel und bringen die Punkte.

$$\underline{x}=\frac{\begin{vmatrix}(-5-i8) & (4+i)\\ (20+i4) & (2-i6)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(2-i2) & (4+i)\\ (1+i3) & (2-i6)\end{vmatrix}}=\frac{(-5-i8)\cdot(2-i6)-(20+i4)\cdot(4+i)}{(2-i2)\cdot(2-i6)-(1+i3)\cdot(4+i)}$$
$$=\frac{(-10-i16+i30-48)-(80+i16+i20-4)}{(4-i4-i12-12)-(4+i12+i-3)}=\frac{(-58+i14)-(76+i36)}{(-8-i16)-(1+i13)}$$
$$=\frac{-134-i22}{-9-i29}$$
$$=\frac{(-134-i22)\cdot(-9+i29)}{(-9-i29)\cdot(-9+i29)}=\frac{1844-i3688}{9^2+29^2}=\frac{1844-i3688}{922}$$
$$=\frac{1844}{922}-i\frac{3688}{922}=2-i4$$

$$\underline{y}=\frac{\begin{vmatrix}(2-i2) & (-5-i8)\\ (1+i3) & (20+i4)\end{vmatrix}}{-9-i29}=\frac{(2-i2)\cdot(20+i4)-(1+i3)\cdot(-5-i8)}{-9-i29}$$
$$=\frac{(48-i32)-(19-i23)}{-9-i29}=\frac{29-i9}{-9-i29}$$
$$=\frac{(29-i9)\cdot(-9+i29)}{(-9-i29)\cdot(-9+i29)}=i\cdot\frac{922}{922}=i$$

Die Lösungen des komplexen LGS lauten:

$$\underline{x}=2-i4=\sqrt{20}\cdot\left(\cos(5{,}18)+i\cdot\sin(5{,}18)\right)=\sqrt{20}\cdot e^{i\cdot 5{,}18}$$
$$\underline{y}=i=i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{2}}$$