Informationstheorie

Informationsbit ≠ Daten-Bit (Unterscheidung durch Groß-/Kleinschreibung)

- ➔ Informatik [Bit] → 1Byte = 8Bit

Shannon-Grenze:

- darf nicht unterschritten werden, wenn digitalisiert wird
- Bsp. Vorlesung hat n bit → mindestens n Bit sind nötig, um zu digitalisieren
- bei Unterschreitung gibt es Verluste
- ➔ Minimalanforderungen für digitale Systeme
- ➔ geht zurück auf die Telefontechnik
- umgekehrt kann man unendlich viele digitale Bits produzieren, die keine Information enthalten!!

Informationsquader nach Shannon:

$$I = B \cdot D \cdot T$$

$$\frac{I}{T}\left[\frac{bit}{s}\right]$$

I = Informationsmenge [bit]

B = Bandbreite ($f_{\max} - f_{\min}$) $\left[Hz = \frac{1}{s}\right]$

D = Shannon-Dynamik [bit]

T = Dauer [s]

$\frac{I}{T}$ = Informationsrate $\left[\frac{bit}{s}\right]$

- Betrachtet man ein Signal genauer („ranzoomen"), kann man ein Rauschen auf dem Signal erkennen → mikroskopische Betrachtung würde zum Schluss kommen, dass es keine Informationen enthält → kann man feststellen, dass das vom Rauschen überlagerte Signal über einen Zeitraum fällt, hat man ein Informationsbit ermittelt
- Information wird durch Rauschen begrenzt (ein (theoretischer) unendlicher Informationsgehalt wäre nur bei einer unendlichen Signalamplitude oder ohne Rauschen möglich)
- Größe der Informationsstufe = Rauschamplitude

Shannon-Dynamik:

Zahl der unterscheidbaren Zustände eines Systems bei gegebener Signalamplitude bzw. Signalleitung und gegebener Rauschamplitude bzw. Rauschleistung

$$ld \rightarrow dualer\ Logarithmus = \log_2$$

$$D = \mathrm{ld}\left(\frac{P_S + P_R}{P_R}\right) = \lg\left(1+\frac{P_S}{P_R}\right)\cdot\frac{1}{\lg(2)} = \lg\left(1+\frac{P_S}{P_R}\right)\cdot\frac{1}{0{,}301} \approx \frac{10\cdot\lg\left(1+\frac{P_S}{P_R}\right)}{3}$$

$$\xrightarrow{wenn\, P_S \gg P_R} D \approx \frac{10\cdot\lg\left(\frac{P_S}{P_R}\right)}{3} \approx \frac{SNR}{3}$$

- ➔ Gilt nicht für stark verrauschte Signale, weil dort $P_S \gg P_R$ nicht mehr gilt und somit $1+\frac{P_S}{P_R}$ nicht mehr mit $\frac{P_S}{P_R}$ angenähert werden kann.

Aufgabe:
Ein NAT Seminar soll analysiert werden.

a) Wie viel bit/s hat das Signal
b) Wie viel bit hat ein Seminar (T = 3Std.)
c) Welche Datenrate bräuchte man bei der Digitalisierung des Signals

gegeben:

$L_R = 40dB$

$L_S = 65dB$

Lösung:

a) Umrechnung der Pegel auf Intensitäten:

$$J_R = 10^{-12}\cdot 10^{\frac{40dB}{10}} = 10^{-8}\frac{W}{m^2}$$

$$J_S = 10^{-12}\cdot 10^{\frac{65dB}{10}} = 3{,}16\cdot 10^{-6}\frac{W}{m^2}$$

Berechnen der Shannon Dynamik:

$$D \approx \frac{10\cdot\lg\left(1+\frac{J_2}{J_1}\right)}{3} = \frac{10\cdot\lg\left(1+\frac{3{,}16\cdot10^{-6}\frac{W}{m^2}}{10^{-8}\frac{W}{m^2}}\right)}{3} = 8{,}33 \rightarrow 9bit$$

- ➔ Das bit ist die kleinste Einheit, daher gibt es keine Nachkommastellen und es wird immer aufgerundet!!

Berechnen der Informationsrate:

$$\frac{I}{T} = \frac{9bit\cdot 16.000Hz}{1s} = 144.000\frac{bit}{s} = 1{,}44\cdot 10^5\frac{bit}{s}$$

b) Für ein Seminar von 3 Std. Länge ergibt sich entsprechend:

$$I = 16.000\frac{1}{s}\cdot 9bit\cdot 10800s = 1{,}55\cdot 10^{9}bit$$

c) minimale PCM Codierung:

$$SNR = D\cdot 3 = 8{,}33\cdot 3 \approx 25dB$$

$$25 = M\cdot 6{,}02 + 1{,}76$$

$$\rightarrow M = 4Bit$$

Datenrate: $M\cdot f_A = 4Bit\cdot 22000Hz = 128000\frac{Bit}{s}$

Kanalkapazität:

- kann man sich wie ein Fenster vorstellen, durch welches der Shannon Quader hindurch passen muss
- Techniken zur Verkleinerung des Quaders sind Modulation (AM und FM) oder Kodierung
- $C = B_k\cdot D_k = \frac{B_k\cdot SNR}{3}$

  $\frac{I}{T} = B_S\cdot D_S$
- AM: hohe Dynamik, geringe Bandbreite
- FM: geringe Dynamik, hohe Bandbreite

Beispiel: „Der Kanal CD“

$$CD \rightarrow PCM\ 16Bit @ 44{,}1kHz$$

$$SNR = M\cdot 6{,}02 + 1{,}76 = 98{,}1dB\ \left(Pegel\,mit\,1\,Nachkommastelle\,angeben\right)$$

$$C_k = \frac{22{,}05kHz\cdot 98{,}1}{3}\cdot 10^{3} = 735750\frac{bit}{s} = 7{,}36\cdot 10^{5}\frac{bit}{s}\left(pro\,Kanal \rightarrow stereo\right)$$

$$C_{k,stereo} = 2\cdot C_k = 1{,}47\cdot 10^{-6}\frac{bit}{s}$$

praktischer Wert für die CD

$$B = 20kHz$$

$$SNR = 91{,}8dB\ \left(maximal\ wegen\ Dither\right)$$

➔ in der Praxis meistens 85dB (typisch)

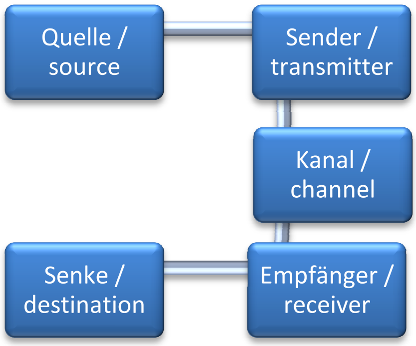
$$C_k = \frac{2\cdot 85}{3}\cdot 10^{4}\frac{bit}{s} = 5{,}67\cdot 10^{5}\frac{bit}{s}$$

Wie viele Seminare passen auf eine CD?

$$\frac{C_{k,CD}}{I_{Seminar}} = \frac{7{,}36\cdot 10^{5}\frac{bit}{s}}{1{,}44\cdot 10^{5}\frac{bit}{s}} = 5{,}11 \approx 5$$

Es passen also pro Kanal 5 Seminare auf die CD. In Mono wären das 10 Seminare.

Shannon: Kanalmodell (Gauss-Kanal)



- der Kanal wird durch endliche Bandbreite und additives weißes Rauschen beeinflusst
- Störung: bei übermäßig großen Rauschen
- Verlust: durch begrenzte Bandbreite
- unendlich große Frequenzen können in Luft nicht übertragen werden → Dissipation (Reibung) der Luftmoleküle
- Aufgabe des Senders: Modulation (analog)/Kodierung (digital) des Signals
- Aufgabe des Empfängers: Demodulation / Dekodierung des Signals
- Transceiver: Können beide Aufgaben übernehmen (2 Richtungen)

➔ typische Gauss-Kanäle haben ein TP-Verhalten (Bsp. Kabel im Mega-/Gigahertzbereich)

➔ Bandbreite der IT-Technik $\left[\frac{bit}{s}\right]$ = Kanalkapazität

➔ typischer IT-Kanal: geringer SNR, hohe Bandbreite → daher sagt man auch Bandbreite

Multiplexing:

Zeitmultiplexing (TDM = time division multiplex):

- Übertragung mehrerer Signale nacheinander im selben Frequenzband
- zeitliches Zerlegen (Faktor z.B. 1/9) des gesamten Signals → Reduzierung/Zeitkompensation
- in die entstehenden Lücken werden andere Signalteile eingefügt

➔ Latenz, weil das Signal wieder zusammengesetzt werden muss

- Bsp. $32kHz \rightarrow Zerlegung\,\frac{1}{9} \rightarrow f_A = 9 \cdot 32kHz = 288kHz \rightarrow B \uparrow$
- je kleiner die Pakete, desto kleiner die Latenz

➔ bevorzugtes Verfahren in der Digitaltechnik

Frequenzmultiplexing (FDM = frequency dividion multiplex)

- Übertragung mehrerer Signale gleichzeitig in verschiedenen Frequenzbändern
- Anwendung z.B. bei AM/FM-Rundfunk, RDS

Codemultiplexing:

- Modulation mit einem Zufallssignal (weißes Rauschen)
- kann nur mit dem gleichen Signal demoduliert werden, ansonsten erhält man Rauschen
- Bsp. Fernsehverschlüsselung → Receiver und Transmitter müssen miteinander kommunizieren → CI-Karte stellt die Verbindung her → ohne Karte bekommt man nur Rauschen
- Transmitter müssen den Codeschlüssel schon vor der Übertragung kennen