P_S = Sendeleistung, welche am Fußpunkt der Antenne beim Empfang vorliegt
Modulations-Effizienz: Wie viel Bit/s gibt es für jedes Hz Bandbreite

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{P_S}{P_N}\right)$$

$$\frac{C}{B} = \log_2\left(1 + \frac{C \cdot E_{bit}}{B \cdot N_0}\right)$$

Shannongrenze: Diese erhält man in Form eines Graphen, wenn man die bandbreiten-normierte Kanalkapazität (Modulationseffizienz $\frac{C}{B}$) über der normierten Energie pro bit ($\frac{E_{bit}}{N_0}$) aufträgt.
Daraus geht hervor, dass es keine Systeme gibt, welche mit wenig Energie sehr gut moduliert werden können.

Digitale Übertragung im Basisband
(→ Fehler in digitalen Systemen wegen nicht idealer Übertragung)

Basisband: Beginn bei Frequenz 0 Hz (im Gegensatz zu trägerbasierten Verfahren, z.B. UKW und Weitverkehrsnetze)

<u>Digitales Basisband</u>

1. Analoge Übertragung erfordert Verzerrungsfreiheit (Verzerrungen sind z.B. phasenverschobene Frequenzanteile, Kabeldämpfung)
   - ➔ Wird durch Zerlegung von Rechteckimpulsen deutlich, diese haben an den Kanten viele hochfrequente Anteile

   Digitale Übertragung fordert eindeutige Abtastung (Unterscheidung von 0 und 1 bei Abtastung)
   (Bsp. Computertechnik: Geräte funken im GHz-Bereich, auf den Platinen befinden sich viele Antennen, die diese Signale empfangen, obwohl sie dies nicht sollen / GHz-Bereich → keine Transversalwellen, sondern Hohlleiter, Signal verläuft am Rand des Leiters)

2. Ein Rechteck würde eine eindeutige Abgrenzung zwischen digitalen Symbolen erlauben (ideale Vorstellung, ohne an die Leitung und das Leitungsende zu denken → keine Entzerrung → findet im Productivity-Bereich Anwendung z.B. bei CMOS)
   - ➔ Problem: Rechteckimpuls erfordert ein unendliches Spektrum

   Kabel können dies nicht verteilen, weil sie bandbegrenzt sind → keine saubere Abgrenzung der Rechtecke, weil HF-Anteile fehlen
   - ➔ Lösung: Bandbreite begrenzen

3. Zur Vermeidung des Bandbreitenproblems oder zur Anpassung an die Realität bedämpfter Strecken → Filterung → Zeitliches Verschmieren der Signale (Bandbegrenzung, um z.B. in höheren Frequenzbereichen noch eine weitere Übertragung mit einem trägerbasierten Modulationsverfahren möglich zu machen)
   - ➔ Idealer TP im Specktrum ergibt SI-Funktion im Zeitbereich → Information ist nicht nur zu einem bestimmten Zeitpunkt vorhanden, sondern auch noch danach → Intersymbolinterferenz (ISI)
   - ➔ Signale überlagern sich, die Übertragung funktioniert allerdings in den meisten Fällen noch → zur Verhinderung von zu großen Fehlern muss das System allerdings vor dem Aufbau sauber definiert werden

4. Ein idealer TP erlaubt eine Minimierung der ISI bei geeigneter Wahl der Grenzfrequenz.
   - ➔ Die SI-Funktion hat äquidistante Nullstellen (Nullstellen mit gleichem Abstand) → Die Tastzeitpunkte sollten genau auf diese Nullstellen gelegt werden → Systemanpassung an die Nullstellen (Erinnerung: $T = \frac{1}{f}$)
   - ➔ Entwurf eines idealen TP Filters mit $f_g = \frac{1}{2 \cdot T_{bit}}$ (Nullstellen ergeben sich aus SI-Verlauf)
   - ➔ Zu den Abtastzeitpunkten liegt jeweils der entsprechende Abtastwert vor, ansonsten Nullstellen der anderen SI-Funktionen. Außerhalb der Abtastzeitpunkte entsteht ISI. Summiert man die SI-Funktionen zu allen Zeitpunkten auf, erhält man einen annähernd sinusförmigen Verlauf
   - ➔ In der Praxis sollte man entsprechend zunächst die Physik betrachten und entsprechend bandbegrenzen.

5. Reale Filter haben ebenfalls äquidistante Nullstellen in der Impulsantwort, wenn die Filterkurve punktsymmetrisch (zum Mittelpunkt auf der abfallenden Filterkurve) ist.
   - ➔ Ein neuer Kanal kann erst dann beginnen, wenn der SNR seine untere Grenze erreicht hat (diese ergibt sich aus dem Anwendungsfall)
   - ➔ Der Aufschlag an Frequenzband, der zusätzlich verwendet wird, wird als Rolloff-Faktor bezeichnet und beträgt in der Regel 10-30 %
   - ➔ Die Abtastung wird über Komparatoren gesteuert, welche bei Zwischenwerten auslösen (Flanken sind interessanter als Hügel / Täler im Signal)

6. Die Impulsantwort des TP sollte so gestaltet sein, dass bei Vielfachen $t = \left(\frac{1}{2} + n\right) \cdot T_{bit}$ entweder ein Symbolwert oder das arithmetische Mittel zweier Symbolwerte entsteht.
   - ➔ Bsp. Cosinus Verlauf im Spektrum → Rolloff-Faktor von 100%
   - ➔ Bandbreite kann gespart werden, es muss nicht ein Faktor 2 genommen werden (→ Kostengründe z.B. bei Satellitenübertragung) → dabei entsteht eine Zerrung im Augendiagramm
   - ➔ Solange die 1 und 0 korrekt erkannt werden und es nur wenige Fehler gibt, funktionider die Übertragung gut (Cluster: Broadcast/Telco, Productivity hinkt hinterher)

Leitungscodierung

- Verbesserung von Zeitinformation → Synchronisation, Taktrückgewinnung
- Beeinflussung, wie eine Strecke frequenzmäßig im Verlauf andere Strecken stört (→ Spektralverformung)
- Bsp. NRZ unipolar:
  - Durch Filterung werden die Ecken abgeflacht
  - Sequenzen von Nullen geben keine Taktinformation aus
- Verlegt man ein längeres Kabel von einem Ort zum anderen, ist in der Regel keine Masse verfügbar, also kein Bezugspunkt → man benötigt daher Codes, die DC-frei sind, um einen Bezugspunkt für den Komparator vorgeben zu können
  - ➔ DC-frei = Integration über Signalverlauf ergibt Gleichfolge
- Bsp. RZ → doppelt so große Taktrate bei Einsen, daher auch doppelte Bandbreite nötig
- Bsp. HDB3 (z.B. bei DSL) → bei Nullfolge gibt es alle 3 Nullen einen Pegel, der dem letzten Pegel entspricht, der von 0 verschieden war → eine Eins liegt an, wenn dieser Pegel verschieden ist
  - ➔ Spart Bandbreite, pro Taktschritt liegt maximal ein Wert an (Cluster: Telco, viele Teilnehmer auf der Leitung)
- Bsp. Manchester → DC-frei in jedem Bit → verdoppelte Bandbreite → Takt gut zurückzugewinnen (Cluster: Productivity, nur ein Nutzer pro Leitung, Bandbreitenverdopplung kein großes Thema)

  ➔ Die Leitungscodierung ist eine Hilfestellung bei der Übersetzung von der Physik zur technischen Entscheidung.

Rauschen / Bitfehlerwahrscheinlichkeit

- Wahrscheinlichkeit, des weißes Rauschens folgt der Gauss'schen Normalverteilung

  $$p(u_R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot U_R} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u_R}{U_R}\right)^2}$$

  u_R = Momentanwert des Rauschens

  U_R = Effektivwert des Rauschens

- Übertragung eines ungestörten Signals:

  $u_1(t) = +U_E$ (= logische „1")

  $u_0(t) = -U_E$ (= logische „0")

  ➔ Angepasst an einen bipolaren Modulator ($\pm U_E$)

- Überlagerung der Signale mit Rauschen

  $u_1(t) = +U_E + u_R(t)$

  $u_0(t) = -U_E + u_R(t)$

Das Rauschen lässt sich nun darstellen als:

$$u_R(t) = u_1(t) - U_E$$

$$u_R(t) = u_0(t) + U_E$$

- U_E hat keine Streuung, daher gilt für $U_0(t), U_1(t)$ die gleiche Verteilung für $u_R(t)$

- Es ergeben sich die Wahrscheinlichkeitsdichten

$$p(u_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot U_R} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u_1 - U_E}{U_R}\right)^2}, \quad p(u_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot U_R} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u_2 + U_E}{U_R}\right)^2}$$

➔ Entsprechend dem Funktionsverlauf entscheidet ein beim Wert 0 eingesetzer Komparator in den meisten Fällen richtig für 0 oder 1

➔ Es kann allerdings zum Abtastzeitpunkt zur Überlagerung mit dem Rauschen kommen, der Komparator entscheidet dann falsch (→ die Funktionen sagen nur etwas über die Wahrscheinlichkeit aus, es ist nicht garantiert, dass ein Wert immer in der Nähe des höchsten Punktes der Funktion liegt)

- Fehlerfreie Situation → Wahrscheinlichkeit, dass $|u_R| \le |U_E|$

$$p(|u_R| \le |U_E|) = \int_{-U_E}^{U_E} p(u_R)\, du_R = 2 \cdot \int_0^{U_E} p(u_R)\, du_R$$

- Fehlerfall ergibt sich bei größerem U_R

$$p(U_R > |U_E|) = 1 - 2 \cdot \int_0^{U_E} p(u_R)\, du_R$$

- Fehlerwahrscheinlichkeit, angepasst auf bipolar NRZ (ist der Pegel kleiner $-U_E$ oder größer $+U_E$, hilft es bei der Erkennung des richtigen Wertes) → Problem nur auf einer Seite → Fläche, also Wahrscheinlichkeit, wird halbiert

$$p_{Fehler} = 0,5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot U_R} \cdot \int_0^{U_E} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u_R}{U_R}\right)^2} du_R \qquad \text{(nicht analytisch lösbar!!)}$$

Integral wird durch Substitution gelöst mittels $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-z^2} dz$,

der Substution $z = \frac{u_R}{\sqrt{2} \cdot U_R} \Rightarrow dz = \frac{du_R}{\sqrt{2} \cdot U_R} \Rightarrow du_R = dz \cdot \sqrt{2} \cdot U_R$

und entsprechendem Verschieben der Integrationsgrenze $U_E \to \frac{U_E}{\sqrt{2} \cdot U_R}$

ergibt sich:

$$y = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \cancel{U_R}} \cdot \int_0^{\frac{U_E}{\sqrt{2} \cdot U_R}} e^{-z^2} dz \cdot \cancel{\sqrt{2}} \cdot \cancel{U_R} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{U_E}{\sqrt{2} \cdot U_R}} e^{-z^2} dz$$

$$2y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\frac{U_E}{\sqrt{2} \cdot U_R}} e^{-z^2} dz = erf\left(\frac{U_E}{\sqrt{2} \cdot U_R}\right)$$

$$\Rightarrow p_{Fehler} = 0{,}5 - \frac{erf\left(\frac{U_E}{\sqrt{2} \cdot U_R}\right)}{2} = erfc\left(\frac{U_E}{\sqrt{2} \cdot U_R}\right)$$

➔ Mit Hilfe der Analyse kann man schon ein Modell entwickeln, zu dem man die BER berechnet

- In Leistungen überführen (→ Quadrat!!)

$$p_{Fehler} = erfc\left(\sqrt{\frac{P_S}{2 \cdot P_N}}\right)$$

- Weitere Anpassung (→ siehe Rauschleistung)

$$\frac{P_S}{P_N} = \frac{P_S}{N_0 \cdot B} = \frac{E_{bit} \cdot R}{N_0 \cdot B} = \frac{E_{bit}}{N_0} \cdot \frac{2 \cdot R}{S}$$ (R = Datenrate, S = Schrittgeschwindigkeit)

➔ Basisband → Bandbreite der halben Schrittgeschwindigkeit (Rolloff-Faktor beachten!!)

➔ Bei bipolarer Übertragung $R = S$

➔ $p_{Fehler} = erfc\left(\frac{E_{bit}}{N_0}\right)$

- Kurvenanalyse (NRZ unipolar/bipolar)
  - Asymptotisch → gegen $-\infty$ → läuft gegen 0,5 (maximale Unsicherheit)
  - 0 wäre ideal → wird aber nie erreicht
  - Bei guter Leistung kann man schnell sehr viel erreichen
  - Übliche Systeme:
    - 4-8 dB (GSM, Voice)
    - 6-10 dB (Kabel LAN, USB)
    - 14+ dB (Telco)