# Digitale Modulation eines harmonischen Trägers

#### Vorteile:

- Mehrere Kanäle nebeneinander im Frequenzband möglich
- Antennen können zur Übertragung genutzt werden (Antennen weisen ein BP-Verhalten auf, daher ist die Basisbandübertragung für Antennen nicht geeignet)

## Beispiele zur Kanalkapazität

Kabelnetz (Broadcast):

$$C = \frac{850MHz \cdot 80 \ dB}{3} = 22,7 \ Gbit / s$$

DSL (Telco):

$$C = \frac{50 \text{ MHz} \cdot 45 \text{ dB}}{3} = 750 \text{ Mbit / s}$$

# ASK (Amplitude Shift Keying = Amplitudenumtastung)

- Modulation der Zustände des Digitalsignals mit einem Trägersignal der Frequenz  $f_{\scriptscriptstyle T}$
- Möglich ist auch die Unterscheidung der Zustände, indem das Trägersignal ein- und ausgetastet wird (OOK = On/Off Keying)

Ermittlung des Spektrums der ASK, für die gilt:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{logische "0"} \\ 1 \cdot \hat{s}_T \cdot \cos(\omega_T t + \varphi_0) & \text{logische "1"} \end{cases}$$

Dabei lässt sich das Codesignal c(t) in Form einer Fourierreihe darstellen.

 $T_{\rm Bit} = {
m Pulsbreite}$  des Signals

 $T_{Svm}$  = Dauer einer "Periode" (zwei Zustände)

$$c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) - \frac{1}{3} \cdot \cos\left(\frac{6\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) + \frac{1}{5} \cdot \cos\left(\frac{10\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) - \dots\right)$$

$$s(t) = c(t) \cdot \hat{s}_T \cdot \cos(\omega_T t + \varphi_0)$$

Mit 
$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_T \cdot \cos(\omega_T t + \varphi_0) + \frac{2 \cdot \hat{s}_T}{2 \pi}$$

$$\left(\cos\left(\omega_{T} + \frac{2\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) + \cos\left(\omega_{T} - \frac{2\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) - \frac{1}{3} \cdot \cos\left(\omega_{T} + \frac{6\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) - \frac{1}{3} \cdot \cos\left(\omega_{T} - \frac{6\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) + \dots\right)$$

Im Spektrum ergibt sich aus dieser Reihe:

- Ein Pegel von  $\frac{1}{2}$  bei  $f_T$  ( $\Rightarrow$  im Spektrum wird in Frequenzen, nicht in Kreisfrequenzen gedacht  $\Rightarrow \omega_T = 2\pi \cdot f_T$ )
- Untersucht man die weiteren Frequenzanteile, erhält man z.B.

$$\frac{\hat{s}_{T}}{\pi} \cdot \cos\left(\omega_{T} + \frac{2\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) \Rightarrow \frac{2\pi}{T_{\frac{Sym}{Kreisfrequenz}}} = \frac{\pi}{T_{Bit}} \stackrel{:2\pi}{\Rightarrow} \frac{1}{2 \cdot T_{Bit}} = \frac{1}{2} \cdot f_{Bit}$$

- igoplus Es entstehen weitere Frequenzlinien, deren Amplituden kleiner sind (hier:  $\frac{1}{\pi}$ ). Diese liegen jeweils im gleichen Abstand von  $f_T$
- Legt man einen Cosinus in die Funktion c(t) herein, hat dieser genau den Faktor 2 bei der Periodenlänge im Verhältnis zur Dauer  $T_{Bit}$   $\rightarrow$  daher taucht überall der Faktor  $\frac{1}{2}$  auf

## Ergebnisse:

- Das Ein- und Ausschalten des Signals bewirkt die Ausdehnung im Spektrum um den Träger herum
- Der Verlauf im Spektrum ist SI-förmig (→ Rechteck im Frequenzbereich)
- Schnelles Takten im Basisband  $\rightarrow$  mehr Bandbreite um den Träger herum nötig ( $T = \frac{1}{f}$ )

Veränderung zu realen Bedingungen:

- Es werden keine Rechtecke, sondern Sinusverläufe übertragen
- Nur die Grundschwingung bleibt in der Fourierreihe erhalten

$$c(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_T \cdot \cos\left(\omega_T t + \varphi_0\right) + \frac{\hat{s}_T}{\pi} \cdot \left(\cos\left(\omega_T + \frac{2\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) + \cos\left(\omega_T - \frac{2\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right)\right)$$

- lacktriangle Im Spektrum befinden sich neben dem Pegel bei  $f_T$  nur noch 2 Pegel bei  $f_T \pm \frac{1}{2} \cdot f_{\mathit{Bit}}$
- Erreicht werden kann diese Bandbreitenreduzierung durch eine Filterung (Curving) im Basisband vor der Modulation

## Bandbreitenanforderung:

$$B_{ASK \min} = S = Baudrate \ \left(Praxis: B_{ASK \min} = S \cdot (1+r)\right)$$

- → Rolloff-Faktor beachten (Filter mit begrenzter Flankensteilheit → man muss den Anteil mit einberechnen, auch wenn er nicht genutzt wird)
- → Trägermodulation nutzt auch die negativen Frequenzen → Faktor 2 beim Rolloff-Faktor (→in eine Periode einer Schwingung passen 2 Zustände)

#### Demodulation:

- 1. Inkohärente Demodulation
  - BP-Filterung mit  $f_T \to Verlauf$  über nicht-lineares Glied  $\to$  TP-Filterung  $\to$  S&H  $\to$  Ausgabe Basisband-Signal (Hüllkurvendetektor)
- 2. Kohärente Demodulation  $\text{BP-Filterung mit } f_T \to \text{Mischung mit } f_T \to \text{TP-Filterung} \to \text{S\&H} \to \text{Ausgabe Basisband-Signal (Synchrondetektor)}$

Mischen von Signalen zur Demodulation:

$$\begin{split} s_{D}\left(t\right) &= \underbrace{s_{N}\left(t\right)}_{\text{Nachrichtensignal}} \underbrace{\frac{\hat{s}_{T} \cdot \cos\left(\omega_{T}t + \varphi_{0}\right)}{\text{Modulation}}} \underbrace{\frac{\hat{s}_{T} \cdot \cos\left(\omega_{T}t + \varphi_{0}\right)}{\text{Demodulation}}} \\ \text{mit } \cos^{2}\left(\alpha\right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(2\alpha\right) \\ s_{D}\left(t\right) &= s_{N}\left(t\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(2\omega_{T}t\right)\right) \end{split}$$

- → Mischung mit demselben Trägersignal → Signal im Basisband + Signal bei doppelter Trägerfrequenz (beide jeweils bei halbem Pegel)
- → Funktioniert nur bei exakt gleichem Träger (Frequenz & Phase)

Problem der ASK bei der Antennenübertragung:

- Beim Wechsel zwischen direkter und gestörter Übertragungsstrecke komme es zu Pegelunterschieden (bis zu Faktor 1000 unterschiedlich)
- → Keine ASK auf Antennenstrecke (→ es werden FSK und PSK verwendet)

### FSK (Frequency Shift Keying = Frequenzumtastung)

- Entsprechend der Zustände wird zwischen zwei Trägerfrequenzen umgeschaltet (→ man benötigt 2 Oszillatoren im Modulator)
- Trägerfrequenz:  $f_{Tr} = \frac{f_1 + f_2}{2}$  (einzelne Träger bei  $f_1$  und  $f_2$ )
- Es muss so viel verstärkt werden, dass 2 Frequenzen unterschieden werden können

#### Kohärente FSK Demodulation:

2 Bandpässe ( $f_1 \& f_2$ )  $\rightarrow$  kohärente Demodulation durch entsprechende Mischungen  $\rightarrow$  Summenfrequenzen per TP filtern  $\rightarrow$  Summe +/-  $\rightarrow$  S&H  $\rightarrow$  Ausgabe Basisband-Signal

- Bei Mischung von  $f_1$  mit  $f_1$  entsteht  $2 \cdot f_1 + C$ , wobei  $2 \cdot f_1$  gefiltert wird
- Bei Mischung im  $f_2$  -Zweig entsteht sowohl  $\,f_1+f_2\,$  als auch die Schwebung  $f_1-f_2\,$
- → Entschieden wird auf den jeweils höheren Pegel

→ Gut konstruierte Systeme werden so realisiert, dass im Moment der Abtastung die Kurve der Schwebung einen Nulldurchlauf hat

# PSK (Phase Shift Keying = Phasenumtastung)

- Forderung: Die Übertragung soll sicher und bandbreitenniedrig sein
- Es werden 2 Phasenlagen umgetastet (0° und 180°)
- Vergleich mit ASK im Bezug auf die nötige Bandbreite → Bandbreitenbedarf wird sich im gleichen Rahmen aufhalten
  - → Ein Träger mit einer Phasenlage wird eingeschaltet, ausgeschaltet, danach wieder mit einer anderen Phasenlage wieder eingeschaltet (Umschaltung erzeugt die zusätzlichen Anteile im Spektrum)

Ermittlung des Spektrums der PSK, für die gilt:

$$s(t) = \begin{cases} -1 \cdot \hat{s}_T \cdot \cos(\omega_T t + \varphi_0) & \text{logische "0"} \\ 1 \cdot \hat{s}_T \cdot \cos(\omega_T t + \varphi_0) & \text{logische "1"} \end{cases}$$

$$c(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) - \frac{1}{3} \cdot \cos\left(\frac{6\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) + \frac{1}{5} \cdot \cos\left(\frac{10\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) - \dots\right)$$

Mit 
$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$s(t) = \frac{2 \cdot \hat{s}_T}{\pi} \cdot$$

$$\left(\cos\left(\omega_{T} + \frac{2\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) + \cos\left(\omega_{T} - \frac{2\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) - \frac{1}{3} \cdot \cos\left(\omega_{T} + \frac{6\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) - \frac{1}{3} \cdot \cos\left(\omega_{T} - \frac{6\pi}{T_{Sym}} \cdot t\right) + \dots\right)$$

Im Spektrum ergibt sich aus dieser Reihe:

- Der informationslose Träger hat keinen Pegel (es wird keine Leistung dafür verschwendet)
- In den Seitenbändern, welche Information enthalten, ist der Pegel verdoppelt
- Keine Bandbreitenvergrößerung im Bezug zur ASK

#### Bandbreitenanforderung:

$$B_{PSK \, \text{min}} = S = Baudrate \ \left( \text{Praxis: } B_{PSK \, \text{min}} = S \cdot (1+r) \right)$$

Realisierung von weicheren Phasenübergängen:

- Hoher Modulationsgrad → ähnlicher Verlauf wie AM → eigentlich "analoger" Verlauf
  - → Die Kurve könnte auch analog interpretiert werden

## **PSK-Demodulation:**

Mischung mit exaktem Referenzträger → TP-Filterung → S&H → Ausgabe Basisband-Signal

# Eingangssignal:

$$s_E(t) = \pm \hat{s}_E \cdot \cos(\omega_T t + \varphi_0) \Rightarrow$$
 man "sieht"  $\pm$  1-Mal die Schwingung

#### Referenzsignal:

$$s_R(t) = \pm \hat{s}_R \cdot \cos(\omega_T t + \psi)$$

# Demoduliertes Signal:

$$\begin{split} s_{\text{Demod}}\left(t\right) &= \pm \hat{s}_{E} \cdot \hat{s}_{R} \cdot \cos\left(\omega_{T}t + \varphi_{0}\right) \cdot \cos\left(\omega_{T}t + \psi\right) \\ &= \pm \hat{s}_{E} \cdot \hat{s}_{R} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\varphi_{0} - \psi\right) \cdot \frac{\cos\left(2\omega_{T}t + \varphi_{0} + \psi\right)}{\text{wird durch Filterung entfernt}}\right] \\ &= \pm C \cdot \cos\left(\varphi_{0} - \psi\right) \\ &\left(C = \hat{s}_{E} \cdot \hat{s}_{R} \cdot \frac{1}{2}\right) \end{split}$$

- **→** Der Pegel ist nur vorhanden, wenn die Phasenlage günstig ist (idealerweise  $0 \rightarrow \cos(0) = 1 \text{ oder } \pi \rightarrow \cos(\pi) = -1$ )
- ightharpoonup Referenzträger  $f_{\it R}$  muss ziemlich genau mit dem Lokaloszillator beim Sender übereinstimmen ightharpoonup aus dem Sendesignal muss ein Rückschluss darauf gezogen werden
- → Beim Träger liegt allerdings im Spektrum nichts vor

# PSK Trägerrückgewinnung:

- Durch Mischen der zwei ersten Seitenfrequenzen entstehen Anteile bei 0 Hz, im Basisband, bei  $2\cdot f_T$  sowie um  $2\cdot f_T$  herum
- Um  $f_T$  herauszufiltern, wird das Signal über einen Frequenzteiler und anschließend durch ein PLL geschickt  $\rightarrow$  Zustände können dann herausgelesen werden

#### DPSK:

- Differentielle PSK als Variante der PSK
- Es wird eine 1 bei Phasendrehung um  $\pi$  übertragen, ansonsten eine 0
- Das Invertieren des Eingangscodes ändert nichts an der Erkennung (→ Vorzeichendreher spielt keine Rolle)
- Differentielle Codierung braucht ein Gedächtnis, weil sonst kein Vergleichswert vorliegt, mit dem man vergleichen kann

#### Q-PSK (4-PSK):

- Man übertragt mit 4 Phasenlagen, die jeweils um 90° verschoben sind
- $B_{PSK \min} = S = Baudrate$ 
  - → Es kann bei gleicher Bandbreite mehr übertragen werden (4 Zustände statt 2)
- Signal setzt sich aus Inphasen (Cosinus)- und Quadraturkomponente (Sinus)
  - → Im konstellationsdiagramm sieht man die idealisierten Werte (die Zeitachse muss man sich als Achse im Raum vorstellen)

QAM (Quadraturamplitudenmodulation) – Modulator:

Differenzcoder (Aufteilung in 2 Wege) → Mapper → Pulsformer → Mischer (einmal 0°, einmal 90°) → Summenausgabe

Oszillator z.B. Sinus  $\rightarrow$  +90°  $\rightarrow$  Cosinus als 2. Mischsignal

QAM - Demodulation:

$$s(t) = \pm 1 \cdot \hat{s}_T \cdot \cos(\omega_T t) \pm 1 \cdot \hat{s}_T \cdot \sin(\omega_T t)$$

Sinus-Mischzweig

$$\hat{s}_{R} \cdot \sin(\omega_{T}t)$$

$$s_{De \, \text{mod}}\left(t\right) = \underbrace{\pm \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_{T} \cdot \hat{s}_{R} \cdot \cos(\omega_{T}t) \cdot \sin(\omega_{T}t)}_{wird \, zu \, 0 \, oder \, weggefiltert} \pm \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_{T} \cdot \hat{s}_{R} \cdot \sin(\omega_{T}t) \cdot \sin(\omega_{T}t)$$

Cosinus-Mischzweig

$$\hat{s}_R \cdot \cos(\omega_T t)$$

$$s_{De \, \mathrm{mod}}\left(t\right) = \pm \frac{1}{2} \cdot \hat{s}_{T} \cdot \hat{s}_{R} \cdot \cos\left(\omega_{T}t\right) \cdot \cos\left(\omega_{T}t\right) \pm \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \hat{s}_{T} \cdot \hat{s}_{R} \cdot \cos\left(\omega_{T}t\right) \cdot \sin\left(\omega_{T}t\right)}_{wird \, zu \, 0 \, oder \, wegge filtert}$$

## Clusteranalyse:

Broadcast und Telco haben viel Erfolg mit den Systemen und auch gute Systeme entwickelt. Der Productivity-Bereich hat noch sehr wenig Erfahrung auf diesem Gebiet.